

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА»  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ

**УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ  
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МОД  
БИФОТОННОГО ПОЛЯ**

Диплом  
студента кафедры  
квантовой электроники  
Ковлакова Е.В.

Научный руководитель  
к.ф.-м.н.  
С.С. Страупе

Москва, 2014

# Содержание

<b>1 Литературный обзор</b>	<b>3</b>
1.1 Угловой спектр СПР . . . . .	3
1.2 Разложение по модам Шмидта . . . . .	4
1.3 Моды Гаусса-Эрмита . . . . .	7
1.4 Моды Гаусса-Лагерра . . . . .	11
1.5 Фокусировка излучения накачки . . . . .	15
<b>2 Оригинальная часть</b>	<b>17</b>
2.1 Генерация пучка с произвольным составом мод . . . . .	18
2.2 Схема установки . . . . .	21
2.3 Результаты . . . . .	23
2.3.1 Случай накачки в моде Гаусса-Эрмита ненулевого по- рядка . . . . .	27
2.3.2 Неравенства Белла . . . . .	29
2.4 Заключение и выводы . . . . .	31

# Введение

В настоящее время многоуровневые квантовые системы с размерностью гильбертова пространства состояний  $d > 2$  (кудиты) вызывают большой интерес, который во многом обусловлен возможностью их практического применения. Одним из способов реализации кудитов является использование степеней свободы фотонов. В сравнении с кубитами ( $d = 2$ ), оптические кудиты позволяют увеличить степень секретности протоколов квантовой криптографии [1, 2] и уменьшить воздействие шума информационного канала. Также кудиты востребованы в линейно-оптических квантовых вычислениях, к тому же в системах больших размерностей становятся более существенными нарушения неравенств Белла [3, 4].

Одним из основных источников кудитов на основе пространственных степеней свободы фотонов является процесс спонтанного параметрического рассеяния (СПР). Для выделения из бесконечномерного пространства состояний углового спектра СПР систем размерности  $d$  можно ввести дискретный базис пространственных мод. В этом случае изменение модового состава накачки процесса СПР позволяет осуществить полный контроль над пространственными степенями свободы итогового спектра. Дальнейшее развитие такого метода должно позволить генерировать произвольные пространственные состояния рассеянных фотонов, а также детектировать их посредством проекционных измерений в выбранном базисе.

В данном реферате представлен литературный обзор статей, посвященных управлению угловым спектром СПР путем генерации пучка накачки в пространственных поперечных модах Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра. Отдельное внимание удалено вопросу фокусировки накачки в кристалл и её влиянию на число генерируемых при СПР мод. В оригинальной части рассмотрена реализация эксперимента по исследованию кросс-корреляций между пространственными модами сигнального и холостого фотонов в базисе Гаусса-Эрмита, в том числе при преобразовании моды накачки в низшие моды Гаусса-Эрмита с последующей генерацией состояний белловского типа на основе пространственных степеней свободы фотона.

## 1 Литературный обзор

### 1.1 Угловой спектр СПР

Рассмотрим влияние пространственного спектра накачки нелинейного кристалла на вид выходного состояния. Будем считать, что пучок накачки

и генерируемые в процессе СПР поля монохроматичны. В первом порядке теории возмущения рассеяное поле будет иметь вид [5]:

$$|\psi\rangle = |vac\rangle + \text{const} \times \int d\vec{k}_s d\vec{k}_i \Psi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) |1\rangle_s |1\rangle_i, \quad (1)$$

где  $\vec{k}_s$  и  $\vec{k}_i$  – волновые вектора рассеяных сигнального и холостого фотонов соответственно, а  $|1\rangle_s$  и  $|1\rangle_i$  – однофотонные состояния соответствующих пространственных мод. Пренебрегая немонохроматичностью пучка накачки, можно записать  $\Psi(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  в следующем виде:

$$\Psi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \propto \mathcal{E}_p(\vec{k}_s, \vec{k}_i) F_p(\vec{k}_s, \vec{k}_i), \quad (2)$$

здесь  $\mathcal{E}_p(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  описывает пространственный образ Фурье огибающей пучка накачки. Функция

$$F_p(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \text{sinc}\left(\frac{L\Delta_z}{2}\right) \quad (3)$$

является геометрическим фактором кристалла, где  $L$  – длина нелинейного кристалла, а  $\Delta_z$  – продольная волновая расстройка, которая имеет вид:

$$\Delta_z = k_{pz}(\omega_s + \omega_i) - k_{sz}(\omega_i) - k_{iz}(\omega_i), \quad (4)$$

где  $k_{sz}, k_{iz}$  – продольные компоненты волновых векторов сигнального и холостого фотонов (ось  $z$  соответствует направлению волнового вектора накачки  $\vec{k}_p$ , для которого в точности выполняется коллинеарный синхронизм).

Таким образом, изменяя угловой спектр накачки  $\mathcal{E}_p(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  можно управлять спектром СПР.

## 1.2 Разложение по модам Шмидта

Также амплитуда бифотона может быть записана в виде:

$$\Psi(\vec{k}_{s\perp}, \vec{k}_{i\perp}) = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij} \xi_i(\vec{k}_{i\perp}) \xi_j(\vec{k}_{i\perp}), \quad (5)$$

где  $\xi_{i,j}(\vec{k}_{i\perp})$  – произвольные ортогональные поперечные моды поля.

Как состояние двухкомпонентной системы эта функция представима в виде разложения по модам Шмидта в случае непрерывных переменных [6]:

$$\Psi(\vec{k}_{s\perp}, \vec{k}_{i\perp}) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \psi_n(\vec{k}_{s\perp}) \chi_n(\vec{k}_{i\perp}), \quad (6)$$

здесь  $\psi_n(\vec{k}_{s\perp})$  и  $\chi_n(\vec{k}_{i\perp})$  – собственные функции редуцированных матриц плотности подсистем сигнального и холостого фотонов, а  $\lambda_n$  – соответствующие им собственные значения. Одними из достоинств этого разложения является то, что оно позволяет перейти от суммы по двум индексам вида (5) к сумме по одному, а также ввести качественную оценку степени перепутанности состояния бифотонного поля. Для этого используется так называемое «число Шмидта»:

$$K = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2}. \quad (7)$$

Как видно, к увеличению  $K$  приводит рост количества ненулевых собственных значений  $\lambda_n$ , который обусловлен увеличением числа мод разложения (6).

Вернемся к выражению для амплитуды бифотона (2):

$$\Psi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \propto \mathcal{E}_p(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \text{sinc}\left(\frac{L\Delta_z}{2}\right). \quad (8)$$

В приближении широкого кристалла, когда синхронизм выполняется точно для поперечных компонент волновых векторов фотонов ( $\vec{k}_{p\perp} = \vec{k}_{s\perp} + \vec{k}_{i\perp}$ ), продольную расстройку можно записать в виде:

$$\Delta_z = \sqrt{k_p^2 - k_{p\perp}^2} - \sqrt{k_s^2 - k_{s\perp}^2} - \sqrt{k_i^2 - k_{i\perp}^2}. \quad (9)$$

Упростить это выражение можно приняв  $|k_{p,s,i\perp}| \ll k_{p,i,s}$ , что соответствует случаю малых отклонений волновых векторов фотонов по углам от оси  $z$ . Тогда, раскладывая выражение (9) по степеням поперечных компонент до второго порядка включительно, можно в случае точного синхронизма получить [7]:

$$\Delta_z = k_p - k_s - k_i + \frac{(k_{s\perp}^2 - k_{i\perp}^2)^2}{2k_p} = \frac{(k_{s\perp}^2 - k_{i\perp}^2)^2}{2k_p}, \quad (10)$$

и перейти к распространенному в литературе выражению для  $\Psi(\vec{k}_{s\perp}, \vec{k}_{i\perp})$  вида [8]:

$$\Psi(\vec{k}_{s\perp}, \vec{k}_{i\perp}) \propto \mathcal{E}_p(\vec{k}_{s\perp} + \vec{k}_{i\perp}) \text{sinc}\left(\frac{L(k_{s\perp}^2 - k_{i\perp}^2)^2}{4k_p}\right). \quad (11)$$

В работе [9] авторы аппроксимировали функцию sinc гауссом с шириной  $1/\delta$  и для гауссова профиля накачки шириной  $w$  получили следующий вид

$\Psi(\vec{k}_{s\perp}, \vec{k}_{i\perp})$ :

$$\Psi(\vec{k}_{s\perp}, \vec{k}_{i\perp}) \propto \exp\left(-\frac{(\vec{k}_{s\perp} + \vec{k}_{i\perp})^2}{2}w^2\right) \exp\left(-\frac{(\vec{k}_{s\perp} - \vec{k}_{i\perp})^2}{2}\delta^2\right), \quad (12)$$

Полученное приближение в дальнейшем будет неоднократно упоминаться как «приближение двойной гауссоиды». Оно в том числе замечательно тем, что с выражением (12) можно получить аналитическую формулу для  $K$ :

$$K = \left(\frac{w^2 + \delta^2}{2w\delta}\right)^2, \quad (13)$$

и собственных значений  $\lambda_n$ :

$$\lambda_n = 4w\delta \frac{(w - \delta)^{2n}}{(w + \delta)^{2n+1}}. \quad (14)$$

Формула (13) позволяет качественно понять поведение числа Шмидта в зависимости от угловых ширин спектра накачки и параметрики. Так, к примеру, она предсказывает увеличение числа Шмидта при ослаблении фокусировки пучка накачки (если  $w < \delta$ ).

Также в приближении двойной гауссоиды можно учесть последующую пространственную фильтрацию при детектировании, введя ширину  $a$  гауссовой апертуры в дальней зоне. Модификация для формулы (13) будет иметь вид [10]:

$$\tilde{K} = \frac{(1/w^2 + 1/\delta^2 + 1/a^2)^2}{(1/w^2 + 1/\delta^2 + 1/a^2)^2 - (1/w^2 - 1/\delta^2)^2} \quad (15)$$

При отсутствии апертуры  $a = \infty$  и формула (15) сводится к уже известной (13). Если же  $a \ll w, \delta$ , число Шмидта приближается к асимптотическому значению  $K = 1$ . Как видно, учет конечной ширины  $a$  в корне изменяет оценку  $K$  для случаев, когда ширины углового спектра накачки и СПР близки по своей величине к угловой ширине апертуры.

Для экспериментального определения числа мод Шмидта часто используется отношение ширин распределений условных отсчетов детекторов (совпадений) к их безусловному числу (сигналу) при сканировании в дальней зоне точечными детекторами:  $R = \Delta_{\perp}^c / \Delta_{\perp}^s$  [7]. Данную величину принято называть «отношением Федорова», она весьма точно описывает поведение  $K$ , но только в ближней и дальней зонах. При переходе от одного режима к другому наблюдается «провал»  $R$ , что не соответствует постоянному значению числа Шмидта. Этого недостатка лишена схема по измерению

степени перепутанности с помощью модифицированного интерферометра Маха-Цандера с призмами Дове [11, 12], а также схема по измерению кросс-корреляционной функции второго порядка по интенсивности  $g^{(2)}$  в много-модовом режиме детектирования [13]. В этом случае  $g^{(2)}$  связана с  $K$  формулой:

$$g^{(2)} = 1 + \frac{1}{K} + \frac{1}{NK}, \quad (16)$$

где  $N$  – среднее число фотонов на моду.

Возвращаясь к приближению двойной гауссоиды стоит отметить, что для него в качестве мод Шмидта удобно выбрать функции Гаусса-Эрмита или Гаусса-Лагерра, так как они являются собственными функциями энергии двумерного изотропного гармонического осциллятора. В общем же случае удобство разложения по модам Гаусса обусловлено тем, что они являются решениями уравнения Гельмгольца в параксиальном приближении, а также имеют ряд характерных особенностей, которые будут рассмотрены ниже.

### 1.3 Моды Гаусса-Эрмита

Комплексная амплитуда мод Гаусса-Эрмита описывается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \text{HG}_{nm}(x, y, z) = & C_{nm} w(z) H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2}\right) \times \\ & \times \exp\left(-i\frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} - i(n + m + 1)\zeta(z)\right), \end{aligned} \quad (17)$$

где коэффициент  $C_{nm}$  имеет вид:

$$C_{nm} = \sqrt{\frac{2}{2^{n+m}\pi n!m!}}, \quad (18)$$

$H_n(x)$  – полиномы Эрмита, а радиус кривизны  $R(z)$ , ширина пучка  $w(z)$  и фазовый сдвиг Гуи (Gouy phase shift)  $\zeta(z)$  выражаются через длину Рэлея  $z_R$  следующим образом:

$$R(z) = z\left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right), \quad w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}, \quad \zeta(z) = \arctg \frac{z}{z_R},$$

соответственно. Порядком пучка  $N$  называют сумму индексов  $N = n + m$ . Как видно, моде нулевого порядка  $\text{HG}_{00}$  соответствует гауссов пучок.

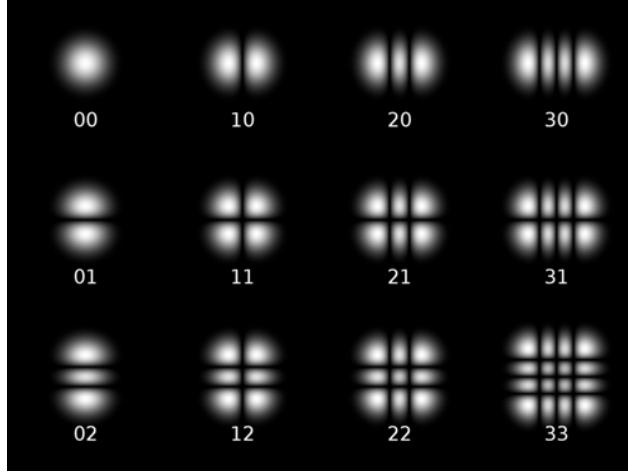


Рис. 1: Вид некоторых мод Гаусса-Эрмита

Отнормированный угловой спектр накачки  $\mathcal{E}_{nm}(\vec{k})$  в моде HG<sub>nm</sub> будет представлять собой двухмерный Фурье-образ выражения (17):

$$\mathcal{E}_{nm}(k_x, k_y) = w D_{nm} H_n\left(\frac{w k_x}{\sqrt{2}}\right) H_m\left(\frac{w k_y}{\sqrt{2}}\right) \exp\left(-\frac{w^2(k_x^2 + k_y^2)}{4}\right) \times \exp(-i(n+m+1)\zeta(z)), \quad (19)$$

где  $w \equiv w(z)$ , а  $D_{nm} = \frac{-i^{n+m}}{2} C_{nm}$  – нормировочный коэффициент.

В теоретической работе [14] был рассмотрен случай, когда в качестве накачки используются моды Гаусса-Эрмита. Пусть пучок накачки характеризуется длиной волны  $\lambda_p$  и шириной  $w_p$ , а пучки рассеянного поля длиной волны  $\lambda_c$  и шириной  $w_c$ .

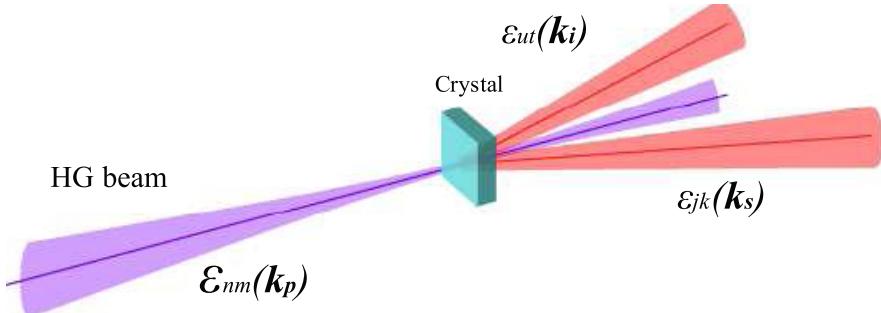


Рис. 2: Угловые спектры пучков накачки  $\mathcal{E}_{nm}(\vec{k}_p)$ , сигнального  $\varepsilon_{ut}(\vec{k}_s)$  и холостого  $\varepsilon_{ut}(\vec{k}_i)$  каналов при СПР. [14]

Так как моды Гаусса-Эрмита образуют полный базис, двухфотонное со-

стояние (5) может быть представлено в виде:

$$|\psi_{nm}\rangle = \sum_{j,k,u,t=0}^{\infty} C_{jkut}^{nm} |\varepsilon_{jk}, \sigma_s\rangle_s |\varepsilon_{ut}, \sigma_i\rangle_i, \quad (20)$$

здесь

$$C_{jkut}^{nm} =_i \langle \varepsilon_{ut}, \sigma_s | \varepsilon_{jk}, \sigma_i \rangle \psi_{nm}, \quad |\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle = \int d\vec{k} \varepsilon_{\alpha\beta}(\vec{k}, \sigma) |\vec{k}\rangle,$$

индексы  $\{jk\}$  и  $\{ut\}$  соответствуют индексам  $\{xy\}$ , а  $\sigma_s$  и  $\sigma_i$  – ширинам мод сигнального и холостого фотонов соответственно. Для мод низших порядков ( $N = n + m \leq 2$ ) выражения для коэффициентов  $C_{jkut}^{nm}$  упрощаются до следующего вида:

$$\tilde{C}_{jkut}^{nm} \propto \text{HG}_{N-n, M-m}(x = 0, y = 0, z = 0), \quad (21)$$

при условии  $j + u \geq n$  и  $k + t \geq m$  (в противном случае  $\tilde{C}_{jkut}^{nm} = 0$ ).

Рассмотрим выражение (21) подробнее. При нечетных  $\gamma$  полином Эрмита  $H_\gamma(0) = 0$ , следовательно  $N - n$  и  $M - m$  должны быть четными. Это значит, что сумма индексов  $\{xy\}$  рассеянных полей  $N = j + u$  и  $M = k + t$  должна иметь ту же четность, что и индексы  $\{xy\}$  поля накачки. Другими словами, четность произведения мод холостого и сигнального фотонов должна быть равна четности моды накачки, к тому же порядок моды накачки не может превосходить сумму порядков рассеянных мод. Также примечательно то, что накачка тонкого кристалла плоской волной  $\mathcal{E}_{nm}(\vec{k}_p) = \delta(\vec{k}_p)$  приводит к значениям  $C_{jkut}^{00} \approx \delta_{ju} \delta_{kt}$ , что соответствует высокой степени перепутанности в поперечных модах сигнального и холостого фотонов. Даный случай был рассмотрен в статье [15].

Развивая тему накачки кристалла произвольной модой Гаусса-Эрмита, в работе [16] рассматривался вид кросс-корреляций в каналах детектирования в зависимости от порядка моды накачки и её ширины. Авторы также воспользовались приближением двойной гауссоиды (12), что позволило в том числе разделить  $x$  и  $y$  координаты и факторизовать коэффициенты разложения как  $C_{jkut}^{nm} = C_{ju}^{(n)} C_{kt}^{(m)}$ .

Оказалось, что величины этих коэффициентов зависят от отношения ширины пучка  $w$  и ширины синхронизма  $\delta$ . Это связано с прямой зависимостью от этих параметров числа генерируемых мод (согласно формуле (13)). Также важно и то, как при этом выбираются ширины детектируемых мод  $\sigma$  из разложения (20). Наиболее оптимальным вариантом является выбор  $\sigma = \sqrt{2w\delta}$ : в этом случае при гауссовой накачке разложение по модам Гаусса-Эрмита принимает диагональный вид:  $C_{ab}^{(0)} \propto \delta_{ab}$ .

На рис.3 и рис.4 изображены значения  $C_{ab}^{(1)}$  и  $C_{ab}^{(2)}$  соответственно при разных  $w/\delta$  и  $\sigma = \sqrt{2w\delta}$ . Из них видно, что с ростом порядка моды накачки  $n$  растет и степень перепутанности состояния бифотонного поля. Она также зависит и от отношения  $w/\delta$ , так при  $w/\delta = 1$  степень перепутанности достигает минимума. Этот результат соответствует выводу работы [9], где при гауссовой накачке и том же отношении  $w/\delta = 1$  достигался минимум числа Шмидта  $K$ . Таким образом, можно сделать вывод о том, что используя при СПР в качестве накачки пучок в mode Гаусса-Эрмита высокого порядка, можно изменять число поперечных мод генерируемого двухфотонного состояния, а также контролировать его степень перепутанности.

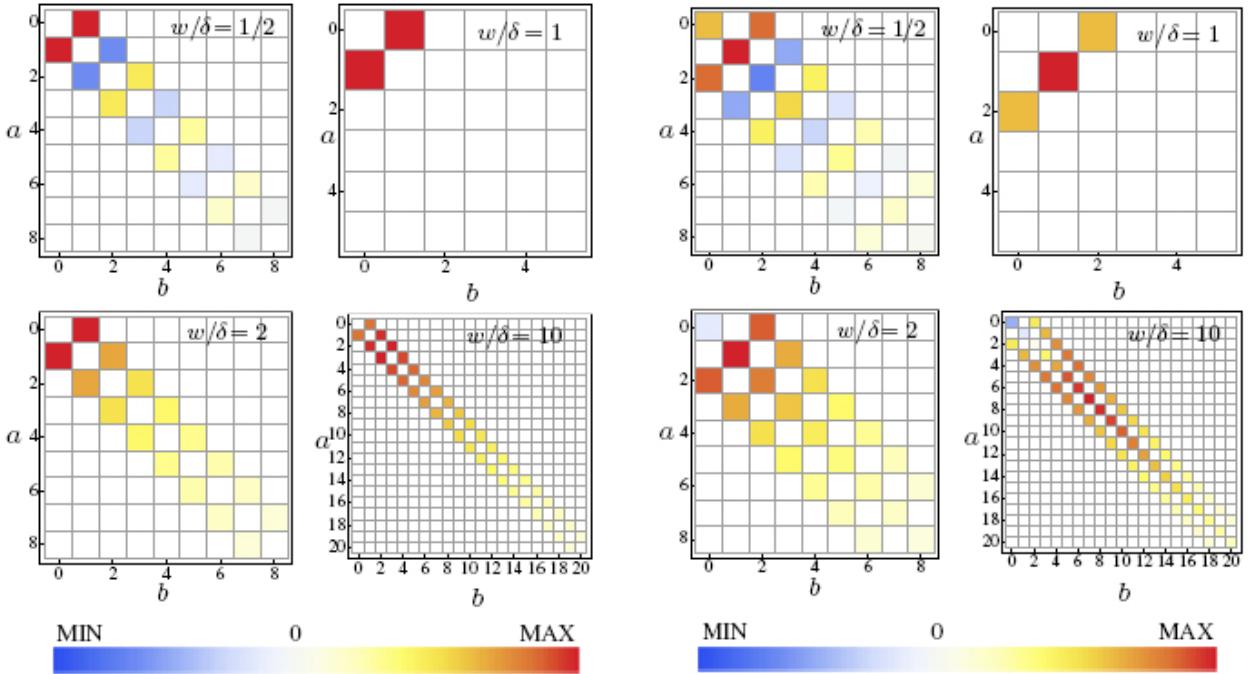


Рис. 3: Коэффициенты  $C_{ab}^{(1)}$  при  $\sigma = \sqrt{2w\delta}$  [16].

Рис. 4: Коэффициенты  $C_{ab}^{(2)}$  при  $\sigma = \sqrt{2w\delta}$  [16].

Среди экспериментальных работ по данной теме можно выделить [17] и [18]. В первой из них было дано экспериментальное подтверждение того, что в качестве мод Шмидта можно использовать выделяемые в рассеянном поле СПР моды Гаусса-Эрмита (накачкой служил гауссов пучок). Во второй работе авторы наблюдали интерференцию сигнального и холостого полей СПР на светоделителе при пучке накачки в разных модах Гаусса-Эрмита первого порядка. Результатом стало подтверждение возможности управления двухфотонным состоянием путем изменения моды пучка накачки.

## 1.4 Моды Гаусса-Лагерра

Фактически выбор между базисными функциями разложения (5) определяется лишь удобством той или иной системы координат. Так в случае мод Гаусса-Эрмита это будет декартова, а в случае мод Гаусса-Лагерра – полярная система. Очевидно, что каждую моду одного из базисов можно представить как суперпозицию мод другого (графическим средством визуализации данного факта является эквивалент сферы Пуанкаре [19] для мод Гаусса). По этой причине работы по изучению пространственных корреляций в базисе Гаусса-Лагерра также включены в данный обзор.

Моды Гаусса-Лагерра в цилиндрической системе координат  $\{\rho, \phi, z\}$  (где  $z$  – направление распространения пучка) описываются следующим выражением:

$$\text{LG}_{pl}(\rho, \phi, z) = \frac{U_{pl}\sqrt{2}}{kw} \left( \frac{\sqrt{2}\rho}{w} \right)^{|l|} \exp\left( -\frac{\rho^2}{w^2} \right) L_p^{|l|} \left( 2\frac{\rho^2}{w^2} \right) \exp(-il\phi) \times \\ \times \exp\left( i(2p + |l| + 1)\zeta(z) - i\frac{kr^2}{2R(z)} + ikz \right), \quad (22)$$

где коэффициент  $U_{pl}$  имеет вид:

$$U_{pl} = (-1)^p k \sqrt{\frac{p!}{\pi(p + |l|)!}}, \quad (23)$$

$L_p^{|l|}(x)$  – присоединенные полиномы Лагерра,  $k = \sqrt{k_0/z_R}$ , а остальные обозначения повторяют использованные в выражении (17). Радиальный индекс  $p$  определяет число нулей амплитуды в радиальном направлении, а azimuthальный индекс  $l$  – набег фазы при обходе вокруг начала координат. Для мод Гаусса-Лагерра порядок моды определяется как  $N = 2p + |l|$ . Также, как и в случае мод Гаусса-Эрмита, моде Гаусса-Лагерра нулевого порядка  $\text{LG}_{00}$  соответствует гауссов пучок.

Пучки в моде Гаусса-Лагерра с ненулевым значением  $l$  интересны тем, что обладают орбитальным угловым моментом. В терминах единичных фотонов это означает, что на каждый фотон в моде приходится орбитальный угловой момент  $l\hbar$  [20]. При определенных условиях в процессе СПР орбитальный момент сохраняется:

$$l_p = l_s + l_i, \quad (24)$$

что позволяет говорить о перепутанности по угловому моменту. Данное утверждение было экспериментально подтверждено в работе [21]. Изменяя

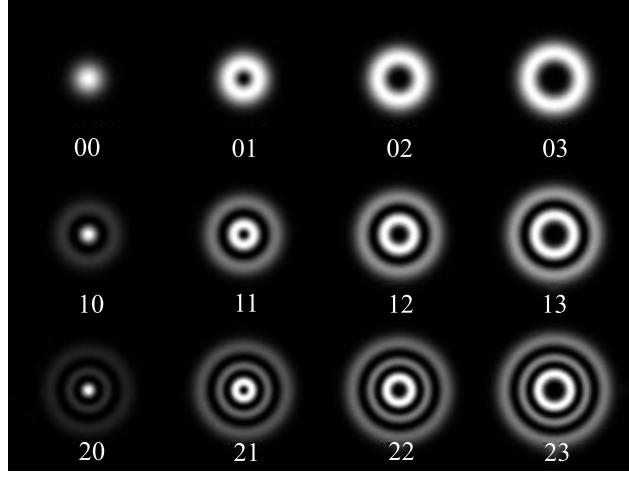


Рис. 5: Вид некоторых мод Гаусса-Лагерра

орбитальный угловой момент накачки в пределах  $l_p = -1, 0, 1$ , авторы с помощью фазовых масок выделяли в сигнальном и холостом каналах моды с моментами  $l_s = 0, 1, 2$  и  $l_i = -2, -1, 0, 1, 2$  соответственно. Результат в виде зависимости скорости счета совпадений от вида выделяемых мод, представленный на рис. 6, подтверждает выполнение условия (24) для разных  $l_p$ .

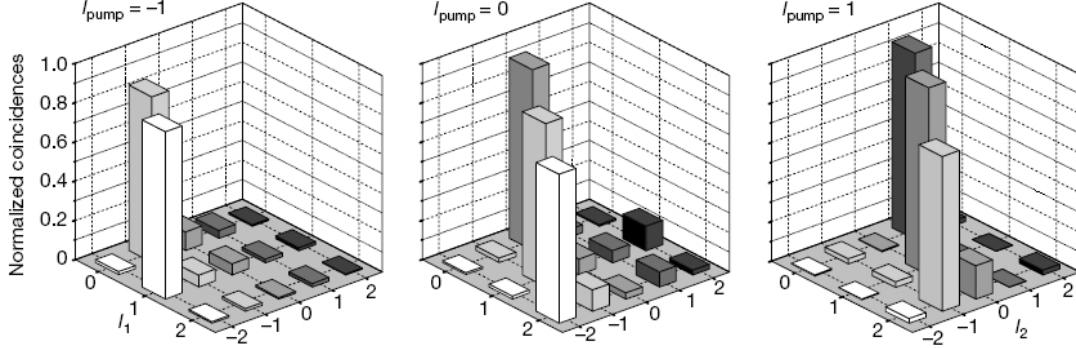


Рис. 6: Зависимости скорости счета совпадений детекторов сигнального и холостого каналов от вида выделяемых в этих каналах мод при разных орбитальных угловых моментах пучка накачки [21].

В базисе мод Гаусса-Лагерра разложение (5) принимает вид:

$$\Psi(\vec{k}_{s\perp}, \vec{k}_{i\perp}) = \sum_{l_s, p_s, l_i, p_i=0}^{\infty} C_{p_s, p_i}^{l_s, l_i} \text{LG}_{p_s l_s}(k_{s\perp}) \text{LG}_{p_i l_i}(k_{i\perp}), \quad (25)$$

где амплитуда  $C_{p_s, p_i}^{l_s, l_i}$ :

$$C_{p_s, p_i}^{l_s, l_i} \propto \int d\vec{k}_{s\perp} d\vec{k}_{i\perp} \Psi(\vec{k}_{s\perp}, \vec{k}_{i\perp}) [\text{LG}_{p_s l_s}(k_{s\perp})]^* [\text{LG}_{p_i l_i}(k_{i\perp})]^*. \quad (26)$$

Воспользовавшись (24) и зафиксировав значение  $p_s$  и  $p_i$  можно перейти к разложению Шмидта:

$$\Psi(\vec{k}_{s\perp}, \vec{k}_{i\perp})_{p_s, p_i} = \sum_{l_s, l_i=0}^{\infty} C_{p_s p_i}^{l_s, l_s - l_i} \text{LG}_{p_s l_s}(k_{s\perp}) \text{LG}_{p_i l_i - l_s}(k_{i\perp}). \quad (27)$$

Такой подход был осуществлен в работе [22], где была рассмотрена зависимость величин весов  $P_{l_s, l_i} = \sum_{p_s, p_i=0}^{\infty} |C_{p_s p_i}^{l_s, l_i}|^2$  от ширины пучка накачки. Оказалось, что с его увеличением весовые коэффициенты  $P_{l_s, l_i}$  также увеличиваются. Также было предложено ввести для этого случая азимутальное число Шмидта  $K_{az}$  [23], соотношение между которым и полным числом Шмидта  $K$  составляет:

$$K_{az} = \frac{2\sqrt{K}}{1 + 1/K}. \quad (28)$$

В работе [24] было проведено экспериментальное измерение  $K_{az}$ , давшее отличное согласование с теоретическим предсказанием ( $K_{az}^{ex} = 21.4 \pm 0.5$  и  $K_{az}^{th} = 21.6$  соответственно). Авторы акцентируют внимание на том, что такое соответствие теории и эксперимента было достигнуто благодаряному сбору «конуса» рассеянного излучения схемой детектирования.

Можно рассмотреть и радиальную часть числа Шмидта  $K_{rad}$ , соответствующую фиксированным значениям  $l$  при всех возможных  $p$ . Оценка для радиального числа Шмидта имеет вид:  $K_{rad} \simeq K$ , его измерения были проведены в работе [25]. Авторы экспериментально и теоретически изучили зависимость величины кросс-корреляций радиальных мод от ширин мод детектирования. На рис. 7 представлены диаграммы скорости счета совпадений от разных значений  $p_s$  (горизонтальная ось) и  $p_i$  (вертикальная ось) при значениях орбитальных моментов  $l_s = -l_i = 0$ . Строки соответствуют разным  $\gamma = 2.4, 3, 4.9$  (сверху вниз), где  $\gamma = w/\sigma_{s,i}$  - отношение ширин пучка накачки и выделяемых мод в сигнальном и холостом каналах. Столбцы соответствуют экспериментальным (слева) и теоретическим (справа) данным.

Как видно, с увеличением  $\gamma$  уменьшается число недиагональных элементов распределения. Это означает, что «ортогональность» мод возрастает, а значит, базис приближается к шмидтовскому (наилучшее приближение к которому достигается при  $\gamma^* = 8.8$ ). Одним из способов увеличения  $\gamma$  до желаемого значения является уменьшение ширин выделяемых мод  $w_{s,i}$ , что приводит к трудностям технического характера (разрешения фазового модулятора, выделяющего моды, становится недостаточным).

Также в работе [25] рассмотрен случай ненулевых орбитальных моментов. На рис.8 представлены зависимости скорости счета совпадений от раз-

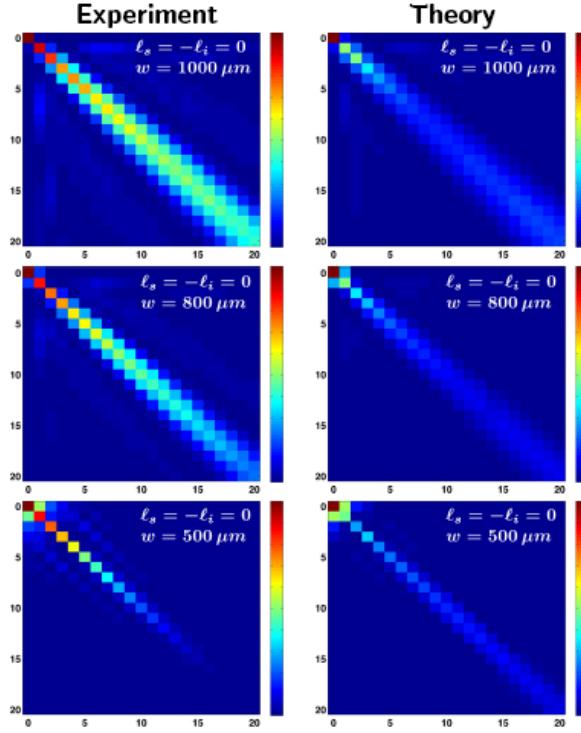


Рис. 7: Зависимости скорости счета совпадений от разных  $p_s$  (горизонтальная ось) и  $p_i$  (вертикальная ось) при значениях орбитальных моментов  $l_s = -l_i = 0$  и различных  $\gamma = 2.4, 3, 4.9$  (сверху вниз).[25].

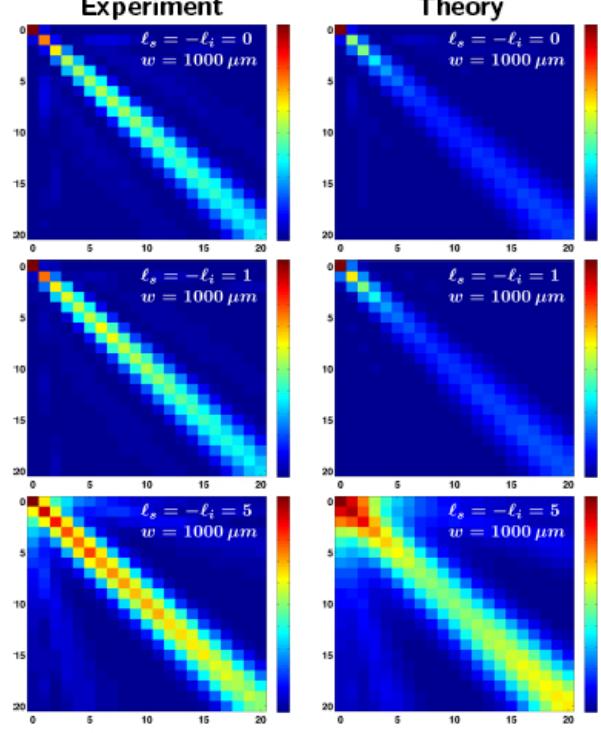


Рис. 8: Зависимости скорости счета совпадений от разных  $p_s$  (горизонтальная ось) и  $p_i$  (вертикальная ось) при разных значениях моментов  $l_s = -l_i = 0, 1, 5$  (сверху вниз) и фиксированном  $\gamma = 2.4$ . [25].

ных  $p_s$  (горизонтальная ось) и  $p_i$  (вертикальная ось) при значениях орбитальных моментов  $l_s = -l_i = 0, 1, 5$  (сверху вниз) и фиксированном  $\gamma = 2.4$ . Как видно, наличие ненулевого орбитального момента незначительно влияет на величину недиагональных элементов, а распределение корреляций вдоль диагонали  $p_s = p_i$  становится более равномерным. Таким образом, данный эксперимент подтвердил возможность использования и радиальных, и азимутальных корреляций в модах Гаусса-Лагерра.

Для того чтобы более корректно определить степень перепутанности приготавливаемых состояний с общим суммарным орбитальным угловым моментом, в работе [26] был проведен эксперимент по нарушению неравенства белловского типа для двумерного подпространства состояний  $l = \pm 2$ . Проекция бифотонных состояний на суперпозиции:

$$|\theta, \phi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|l\rangle + \exp i\phi \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-l\rangle, \quad (29)$$

(где  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ ) в сигнальном и холостом каналах приводила к

отбору среди всех рождающихся пар только состояний вида:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|l_s\rangle | -l \rangle_i + | -l_s \rangle | l \rangle_i). \quad (30)$$

Дальнейшие наблюдения изменений скорости счета совпадений при различных  $\theta$  и  $\phi$  в каждом из каналов позволили измерить переменную  $S$ , что для неравенств Белла в форме Клаузера-Хорна-Шимони-Холта должна удовлетворять соотношению  $-2 \leq S \leq 2$ . При трех разных способах «обхода» аналога сферы Блоха для подпространства  $\pm l$  эта переменная превысила значение 2.5.

## 1.5 Фокусировка излучения накачки

Как было показано выше, число генерируемых при СПР поперечных мод напрямую зависит от угла сходимости пучка накачки. С другой стороны, для эффективного детектирования сигнала СПР с помощью одномодового волокна необходимо, чтобы генерируемая мода хорошо сопрягалась по ширине с фундаментальной. Таким образом, эффективность детектирования оказывается в зависимости от угла сбора излучения рассеяния, что фактически сводится к поиску оптимального соотношения между шириной перетяжки накачки в кристалле с одной стороны и шириной детектируемой перетяжки с противоположной.

Так в работе [27] была рассмотрена модель трехмодового взаимодействия при СПР, в рамках которой пучки накачки, сигнальных и холостых фотонов считаются параксиальными и гауссовыми. К тому же были сделаны следующие приближения:

- нелинейный кристалл длиной  $l$  принимается широким в поперечном направлении, а его поверхность – нормальной к направлению распространения накачки;

- поперечные профили пучков не изменяются на протяжении кристалла;
- вид поля гауссова пучка упрощается до выражения:  $\exp^{ikz} \exp^{-(x^2+y^2)/w^2}$ .

Последнее приближение приводит только к приближенному удовлетворению уравнений Максвелла, но незначительно для пучков с перетяжками  $w$  размером около 100 длин волн.

В результате для одинаковых ширин перетяжек детектирующих мод ( $\sigma_s = \sigma_i = \sigma$ ) при их отношении с пучком накачки  $\gamma = w/\sigma$ , число регистрируемых пар фотонов  $R_T$  оказалось пропорциональным:

$$R_T \propto \frac{1}{\sigma^2(1/\gamma + 2\gamma)^2} \quad (31)$$

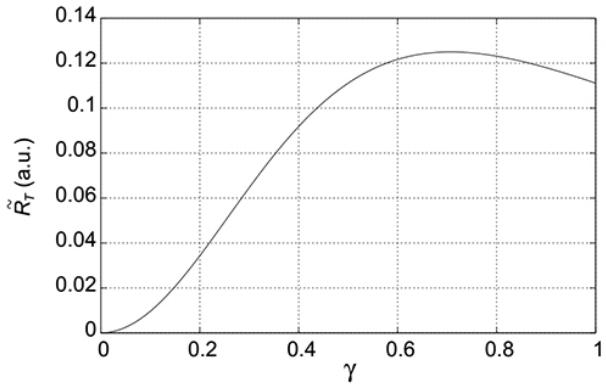


Рис. 9: График зависимости скорости счета детектируемых пар фотонов  $R_T$  от отношения  $\gamma$  между размерами перетяжек моды накачки и детектирования [27].

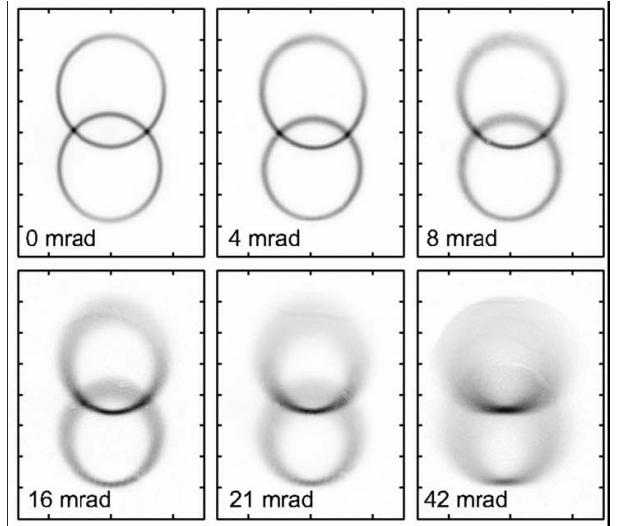


Рис. 10: Распределения излученных при СПР типа-II фотонов для различных углов сходимости накачки [28].

На рис.9 изображен график данной зависимости. Как легко заметить, максимуму соответствует отношение перетяжек  $\gamma = 1/\sqrt{2}$ , в то время как для  $\gamma = 1$  скорость счета фотонов уже меньше на 12%. Данный результат отлично соотносится с приведенным выше утверждением о том, что  $\sigma = \sqrt{w\delta}$  является оптимальной шириной детектирующей моды, ведь рассмотренный случай трех гауссовых мод – это фактически режим генерации с единственной модой Шмидта. То есть согласно формуле (13)  $w = \delta$ , что и приводит к выражению  $\sigma = \sqrt{2}w$ .

В заключении хотелось бы отметить, что приведенные выше модели не учитывают эффектов, связанных с двулучепреломлением света в кристалле. Так в работах [28, 29] было отмечено появление асимметрии в угловом спектре СПР при использовании синхронизма типа-II. Она ярко выражена на рис.10, где приведены измеренные с помощью ПЗС-матрицы распределения излученных при СПР типа-II фотонов для различных углов сходимости накачки. Из-за фокусировки верхние участки «кольца» СПР уширяются в вертикальном направлении, что приводит к уменьшению скорости счета фотонов в одном из каналов при сборе сигнала с участка пересечения этих распределений одномодовыми волокнами.

Для примера авторами статьи [28] были проведены расчеты скорости счета фотонов при их детектировании одномодовыми волокнами при коллинеарном режиме (этот режим для СПР типа-II будет интересовать нас в

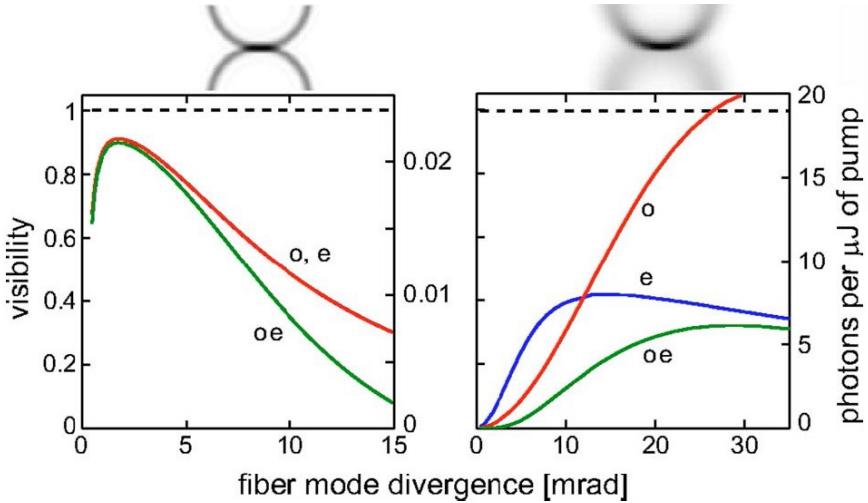


Рис. 11: Теоретические зависимости для чисел фотонов детектируемых парой одномодовых волокон при различных режимах фокусировки накачки (пунктиром отмечена видность перепутанности по поляризации) [28].

далнейшем). Результат для коллимированной и сильно сходящейся накачки приведен на рис.11: сплошными линиями отложены зависимости сигналов одиночных отсчетов и совпадений от величины собираемого волокном угла. Как видно, фокусировка действительно на порядки увеличивает эффективность детектирования, но, правда, выигрыш отчасти теряется из-за падения сигнала в одном из каналов по причине анизотропного уширения.

Такое уширение связано с поперечным сносом необыкновенной волны, который возникает из-за различия в направлениях волнового вектора и вектора Пойтинга  $e$ -волны в одноосном кристалле. Так, в случае нормального падения излучения накачки на кристалл, внутри она все равно будет распространяться под углом. При наличии фокусировки это приводит к смещению колец и асимметричному изменению их радиуса в направлении сноса. Стоит отметить, что уширение можно сделать симметричным добавив после первого кристалла второй такой же. При этом ось второго кристалла должна быть направлена антипараллельно оси первого.

## 2 Оригинальная часть

В рамках работы были поставлены следующие задачи:

1. Достижение режима пространственно-одномодовой генерации.
2. Исследование кросс-корреляций между пространственными модами сигнального и холостого фотонов в базисе Гаусса-Эрмита при гауссовой накачке в режиме одной моды Шмидта.

3. Исследование изменений модового состава и межмодовых корреляций при преобразовании накачки в моды Гаусса-Эрмита малого порядка.

Конечной целью работы являлась генерации чистых белловских состояний на основе пространственных степеней свободы фотонов с последующей проверкой выполнения неравенств Белла.

## 2.1 Генерация пучка с произвольным составом мод

Для генерации пучка в требуемой моде необходимо одновременно изменять его амплитуду и фазовый фронт. В данной работе в этих целях в системе накачки использовался пространственный модулятор света Cambridge Correlators LCoS-SLM размером 13.5 мм x 7 мм и разрешением 1024 x 768 пикселей, а в системе детектирования – Holoeye Pluto LCoS-SLM размером 15.36 мм x 8.64 мм и разрешением 1920 x 1080 пикселей.

Амплитудная модуляция пучка осуществлялась путем добавления поверх фазовой маски необходимой моды ещё и фазовой дифракционной решетки. Как известно, решетка треугольного профиля позволяет концентрировать падающее на неё излучение в желаемый порядок дифракции, что дает возможность выделять желаемую область амплитудного фронта в этом порядке. В пучке накачки требуемый для эффективного выделения первого максимума дифракции сдвиг фаз в  $2\pi$  не мог быть достигнут при одном отражении от SLM, что обусловлено его техническими характеристиками. С другой стороны, использование схемы с двумя отражениями представляет техническую трудность: так как период дифракционной решетки составляет 6 пикселей (он должен быть в несколько раз меньше ширины маски для её высокой детализации), требуется высокая точность выставления масок на обеих половинах матрицы для их качественного наложения. К тому же первоначально падающий и переотраженный пучки имеют разные углы падения на SLM и разные ширины. Последнее обусловлено дифракционной расходимостью, происходящей между отражениями. Все это заставило отказаться от схемы с двумя отражениями и остановиться на фазовой решетке с глубиной модуляции в  $\sim 1,7\pi$ .

Итак, пусть поле на расстоянии  $z_0$  после SLM должно иметь вид:

$$E(x, y, z_0) = A(x, y, z_0) \exp(i\Phi(x, y, z_0)), \quad (32)$$

Тогда на первом этапе расчета голограммы распределение фазы  $F(m, n)$  по пикселям с координатами  $\{m, n\}$  представляет собой просто функцию  $\Phi(m, n)$ . С добавлением дифракционной решетки периода  $\Lambda$  фазовый профиль приобретает вид  $\Psi(m, n) = \text{Mod}(F(m, n) + \frac{2\pi m}{\Lambda}, 2\pi) = \text{Mod}(\Phi(m, n) +$

$\frac{2\pi m}{\Lambda}, 2\pi$ ). Амплитудная же модуляция есть просто умножение на огибающую  $0 \leq M(m, n) \leq 1$ . В нашем случае это модуль амплитуды необходимого поля  $A(m, n)$ . Итоговое распределение фазы можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\Psi(m, n) &= M(m, n)\text{Mod}(F(m, n) + \frac{2\pi m}{\Lambda}, 2\pi) = \\ &= A(m, n)\text{Mod}(\Phi(m, n) + \frac{2\pi m}{\Lambda}, 2\pi).\end{aligned}\quad (33)$$

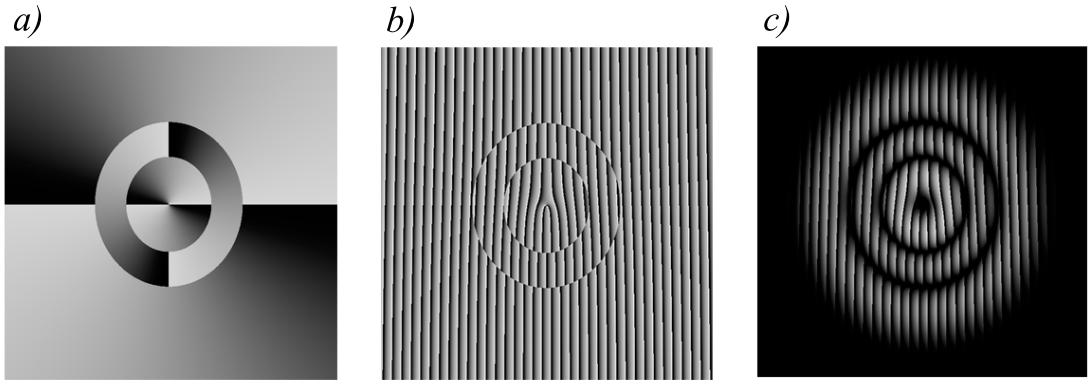


Рис. 12: Разные этапы преобразования пучка на примере моды  $\text{LG}_{22}$ : а) фазовая модуляция, б) добавление дифракционной решетки, в) внесение амплитудной модуляции.

Для наглядности на рис.12 показана последовательность действий по осуществлению фазовой и амплитудной модуляции в случае моды Гаусса-Лагерра  $\text{LG}_{22}$ . Так на левой части а) рис.12 изображено распределение фазы соответствующее аргументу  $\text{Arg}[\text{LG}_{22}]$  выражения (33) для комплексной амплитуды моды. На средней части б) к фазовому распределению добавлена решетка треугольного профиля, которая имеет вид периодического градиента серого. Правая же часть в) представляет собой конечный вид фазовой маски после наложения модуля комплексной амплитуды  $|\text{LG}_{22}|$ .

Здесь важно отметить, что дифракция на краях амплитудной маски  $M(m, n) = 0$  приводит к нежелательным эффектам, а именно к появлению дополнительных пиков интенсивности по краям профиля моды и её уширению. Так на рис.13 для примера приведено изображение измеренного распределения интенсивности для моды Гаусса-Эрмита  $\text{HG}_{11}$  при таком методе генерации. На нем хорошо заметны упомянутые дефекты в горизонтальном и вертикальном направлениях.

На соседнем рис.14 синим изображен результат численного моделирования дифракции гауссова пучка на одномерной голограмме рассмотренного выше вида для генерации моды  $HG_{02}$ . Моделирование представляло собой вычисление дискретного Фурье-преобразования для заданного распределения фазы  $\Psi(t)$  в каждом пикселе решетки. Как видно, подобный расчет также предсказывает появление побочных дифракционных максимумов.

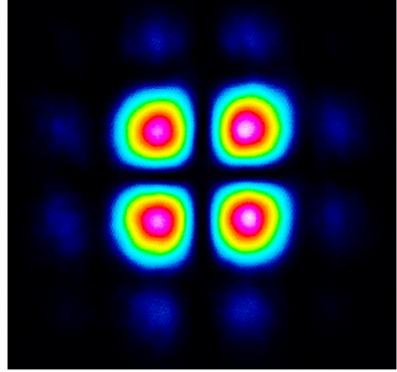


Рис. 13: Распределение интенсивности для моды Гаусса-Эрмита  $HG_{11}$  при старом методе генерации.

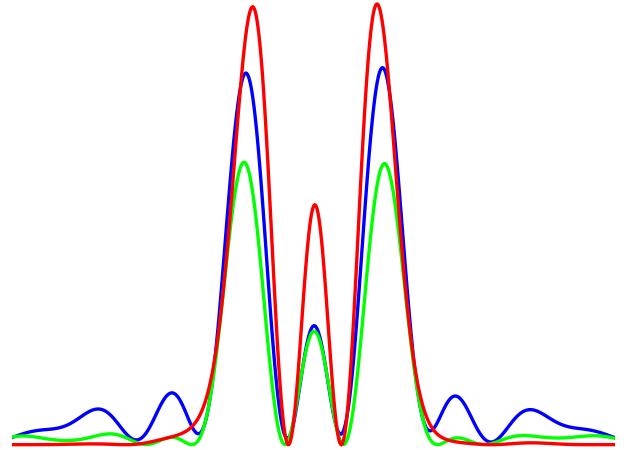


Рис. 14: Результат моделирования дифракции гауссова пучка на SLM для разных способов расчета голограммы  $HG_{02}$ .

Эта проблема упоминается в работах [26, 30] (первая из них была посвящена измерению неравенств Белла для пространственных состояний с  $l = \pm 2$ ), где авторы предлагают умножать распределение фазы голограммы  $\Psi$  не на модуль комплексной амплитуды генерируемой моды  $A$ , а на функцию вида  $\text{sinc}^2((1 - A^2)\pi)$ . Результат численного моделирования для такого случая изображен на рис.14 зеленым цветом. Как видно, побочные дифракционные максимумы уменьшаются, а отношение высоты центрального пика к боковым становится близким к правильному. Заметное качественное улучшение подтверждается результатами аппроксимации: для синей кривой (первый способ) квадрат коэффициента взаимной корреляции с распределением интенсивности для  $HG_{02}$  составил 0.91, а для зеленой – 0.95.

Окончательно разрешить этот вопрос позволяет точное аналитическое решение задачи о преобразовании поля фазовой голограммой. Оно было

приведено в недавней работе [31] для случая падающей на SLM плоской волны. Согласно авторам упомянутой статьи, после голограммы вида (32) в первом порядке дифракции поле приобретает вид:

$$T_1(m, n) = -\text{sinc}(\pi M - \pi) \exp(i(F + \pi M)). \quad (34)$$

Следовательно, избавиться от искажения профиля моды можно задав модулирующие функции следующим образом:

$$M = 1 + \frac{1}{\pi} \text{sinc}^{-1}(A), \quad (35)$$

$$F = \Phi - \pi M, \quad (36)$$

где  $\text{sinc}^{-1}$  – функция обратная  $\text{sinc}$ . Вычислять эту функцию нелегко, да и не то чтобы необходимо:  $|\text{sinc}(\pi A - \pi) - A|$  никогда не превышает 0.161. Поэтому изменением амплитуды можно пренебречь, подвергнув модификации только фазу  $F = \Phi - \pi A$ . Преимущества такого подхода хорошо заметны на рис.14 (красная кривая). Аппроксимация также демонстрирует увеличение  $R^2$  до значения 0.98.

В итоге, исходя из результатов моделирования дифракции и последующей аппроксимации, было принято решение использовать последний способ расчета голограмм. Отдельно стоит отметить, что существует способ генерации голограмм без фазовой решетки [32, 33]. Амплитудная модуляция при этом осуществляется за счет усреднения поля после дифракции на нескольких соседних пикселях. Такой подход позволяет реализовать амплитудную модуляцию в нулевом порядке дифракции. Данный метод не использовался в работе и требует отдельного рассмотрения.

## 2.2 Схема установки

Схема экспериментальной установки представлена на рис.15

В качестве накачки использовался диодный лазер мощностью 450 мВт с длиной волны излучения 408 нм. Для получения гауссова пучка излучение лазера с помощью зеркал заводилось в одномодовое волокно через микроскопный объектив О1 кратностью 20x. Далее пучок на выходе волокна коллимировался при помощи объектива О2 также кратностью 20x. С помощью полуволновой пластинки поляризация накачки подстраивалась под максимальную эффективность дифракции на поляризационно чувствительном SLM1 (Cambridge Correlators). Аналогичным способом поляризация пучка после отражения от SLM (в первом порядке дифракции) выставлялась вдоль вертикали для выполнения частотно-вырожденного коллинеарного

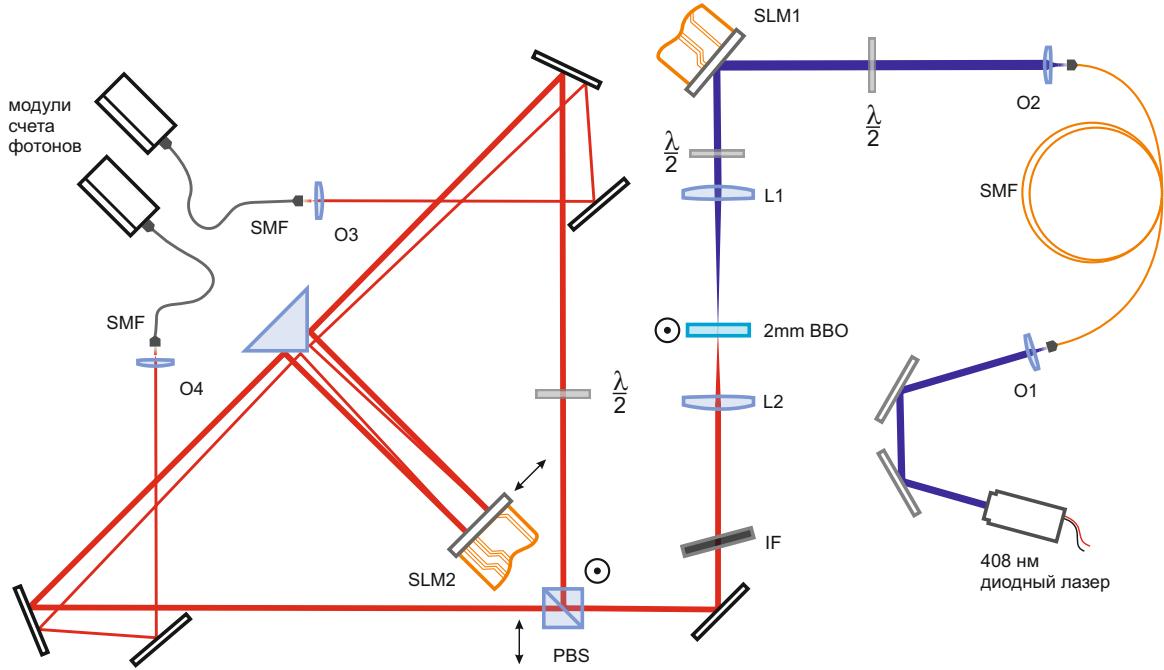


Рис. 15: Схема экспериментальной установки.

синхронизма II-го типа в кристалле ВВО длиной 2мм. Фокусировка накачки осуществлялась линзой L1 с фокусным расстоянием 100 мм, затем излучение СПР собиралось линзой L2 с таким же фокусным расстоянием. По причине того, что центр пропускания интерференционного фильтра соответствовал длине волны 820 нм (ширина спектра пропускания - 10 нм), его приходилось наклонять. При этом максимум пропускания сдвигался в коротковолновую область и совпадал с длиной волны излучения СПР в коллинеарном вырожденном режиме (816 нм).

Далее пучки сигнальных и холостых фотонов разделялись на поляризационном светофильтре, а затем, отражаясь от разных граней треугольной призмы (покрытой высоокоотражающим в ИК-диапазоне покрытием), падали на SLM2 (Holoeye Pluto). Так как второй SLM также обладает направлением оптимальной для его работы поляризации (оно горизонтально), в одном из каналов была установлена полуволновая пластинка. При такой конфигурации второй фазовый модулятор выполнял обратную задачу – он преобразовывал моды пучков в нулевую для последующей пространственной фильтрации одномодовыми волокнами (фокусировка на торцы волокон осуществлялась также объективами 20x). Эти волокна подсоединялись к счетчикам фотонов на основе лавинных фотодиодов (Perkin-Elmer), сигнал с которых поступал на схему совпадений.

Синхронизм II-го типа был выбран из тех соображений, что при нем легко добиться режима с одной модой Шмидта по причине малой относи-

тельно типа-І ширины синхронизма. Другими словами,  $\delta$  из формулы (13) такова, что легко подобрать линзу для фокусировки накачки в перетяжку  $w = \delta$  (при этом пучки должны иметь оптимальный для работы с SLM диаметр). Вообще говоря, при такой схеме экспериментальной установки изменять число Шмидта можно было двумя способами: выбирая разные линзы L1 и изменения ширину амплитудной маски на первом SLM (последнее эквивалентно изменению диаметра пучка).

Линза L2 после кристалла на первом этапе подбиралась так, чтобы выполнялось условие максимума скорости счета совпадений по формуле (31), то есть  $w_{det}/w_p = \sqrt{2}$ .

## 2.3 Результаты

Переходя к результатам измерений сразу необходимо отметить, что ширина синхронизма второго типа зависит от направления сканирования сигнала рассеяния. Это связано с тем, что угловой спектр СПР типа-II существенно несимметричен в плоскости, поперечной направлению волнового вектора накачки. Чтобы это показать, можно провести расчет амплитуды бифотона при учете фокусировки накачки в перетяжку  $w^1$ [34]:

$$F(\theta_s, \theta_i) \propto \exp\left(-\frac{w^2}{4}[k_s(\phi + \theta_s) \sin \theta_s + k_i(\phi + \theta_i) \sin \theta_i]\right) \times \\ \times \text{sinc}\left(\frac{L}{2}[k_p(\phi + \theta_p) - k_s(\phi + \theta_s) \cos \theta_s - k_i(\phi + \theta_i) \cos \theta_i]\right), \quad (37)$$

где  $\theta_i$  и  $\theta_s$  – углы рассеяния сигнального у холостого фотонов соответственно,  $\phi$  – угол между пучком накачки и оптической осью кристалла, а  $\theta_p(\theta_s, \theta_i)$  определяется связью, следующей из равенства нулю поперечной расстройки для каждой угловой фурье-компоненты амплитуды накачки:

$$k_p(\phi + \theta_p) \sin \theta_p = k_s(\phi + \theta_s) \sin \theta_s + k_i(\phi + \theta_i) \sin \theta_i. \quad (38)$$

При малых углах рассеяния связь (38) преобразуется к виду:

$$\theta_p = \frac{n_s(\phi + \theta_s)\theta_s + n_i\theta_i}{2n_p(\phi)}, \quad (39)$$

где  $n_p, n_s, n_i$  – коэффициенты преломления для волн накачки, сигнальной и холостой соответственно (для расчета были использованы дисперсионные

---

<sup>1</sup>здесь и далее под перетяжкой гауссова пучка будет подразумеваться величина  $w$  при которой поле имеет вид  $E \propto \exp^{-x^2/w^2}$

зависимости для этих величин из справочника [35]). Согласно вычислениям, для рассматриваемого случая синхронизм в точности выполняется при угле  $\phi = 41.09^\circ$ .

Для приведенных вычислений предполагалось, что все три волновых вектора  $k_s$ ,  $k_i$  и  $k_p$  лежат в одной плоскости. Если провести тот же самый расчет для всех возможных поворотов такой плоскости вокруг вектора накачки, можно получить ожидаемую картину сечения двух «конусов» излучения сигнального и холостого каналов. Результат такого расчета для случая слабой расходимости накачки представлен на рис.(16) в координатах  $\{\theta_x, \theta_y\}$ . Из-за того, что ширина области пересечения сигнального и холостого колец различается в вертикальном и горизонтальном направлениях, также будут различны и угловые ширины синхронизма. Согласно расчету, они существенно различаются: угловая ширина синхронизма  $\delta$  (при накачке  $\lambda = 408$  нм) в вертикальной плоскости в 7.7 раз меньше, чем в горизонтальной (1.5 мрад и 11.6 мрад соответственно), что приводит и к разным числам Шмидта. В эксперименте эта разница в значительной степени нивелировалась за счет сильной расходимости накачки, необходимой для достижения одномодового режима.

Такую расходимость можно достичь как уширяя пучок, так и используя короткофокусную линзу. И то и другое приводит к увеличению сноса, что уменьшает полезный сигнал. К тому же с уширением пучка существует следующая трудность: приведенный выше метод генерации голограмм для плоских волн хорошо работает только в том случае, когда падающий на SLM гауссов пучок значительно больше маски. Таким образом, приходится искать баланс между качеством генерируемой моды и мощностью отраженного излучения.

На рис.17 приведены измеренные на месте кристалла зависимости размеров перетяжек накачки  $w$  и детектирующей моды  $\sigma$  после линз  $L1$  и  $L2$  соответственно в зависимости от размера маски на SLM1 и SLM2 в пикселях (вторая зависимость измерялась в обратном направлении с помощью юстировочного ИК-лазера с длиной волны излучения 808 нм). Расстояние между линзой  $L2$  и SLM2 составило 1.8 метра, что для используемых размеров масок оказалось близким к

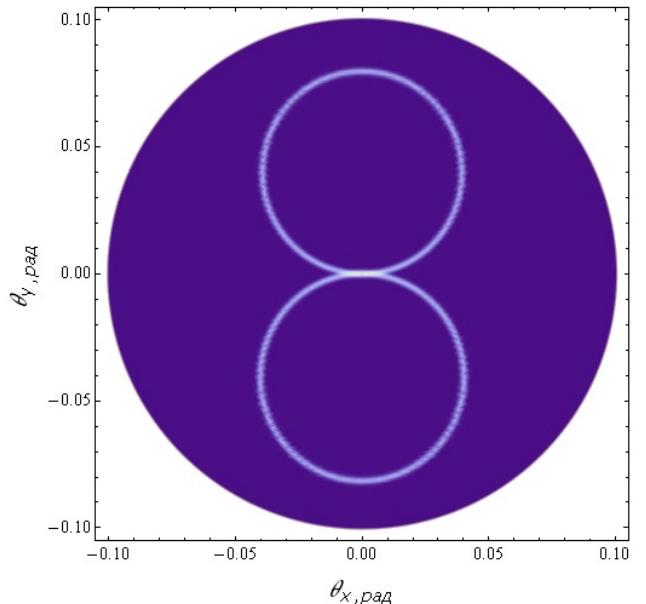


Рис. 16: Вид амплитуды бифотона для всех возможных углов рассеяния при коллинеарном синхронизме типа

половине длины Рэлея. Это приводило к дифракционному уширению пучков, падающих на линзу в обратном накачке направлении, и, как следствие, уменьшению ширины перетяжки для ИК-излучения по отношению к ожидаемым значениям (даный факт был учтен при выборе линзы среди доступных).

В итоге, в качестве оптимальной маски для накачки была выбрана голограмма шириной 150 пикселей ( $\sim 500$  мкм) с соответствующей перетяжкой  $w = 27.5 \pm 1.1$ . Такой выбор с одной стороны обеспечивал хорошее качество генерируемой моды, так как маска по ширине оказывалась в достаточной степени меньше ширины падающего пучка ( $\sim 1100$  мкм). С другой стороны, число Шмидта при этом должно было быть близким к единице, а мощность отраженного от SLM излучения достаточной для работы. Ведь в результате заведения многомодового излучения диодного лазера в волокно ( $\sim 80\%$  потерь), отражений на пластинках ( $5 - 10\%$  потеря на каждой) и потеря из-за неэффективной работы SLM ( $\sim 80\%$  даже при отсутствии амплитудной маски), на кристалл попадало только около 15 мВт излучения. Это приводило к тому, что при наличии амплитудных масок скорость счета сигнала детекторами составляла примерно 1.5 кГц, а совпадений – 10-15 Гц. По этой причине дальнейшее уменьшение размера маски было критичным и существенно бы замедлило эксперимент.

Для такой перетяжки накачки в приближении двойной гауссоиды число Шмидта должно было составить  $K_H = 1.4$  в горизонтальном направлении рассеяния и  $K_V = 1.7$  – в вертикальном. В дальнейшем измерения производились только с модами  $HG_{0n}$ , нули амплитуды которых расположены вдоль горизонтали.

Экспериментально число Шмидта было найдено путем измерения коэффициентов  $C_{ab}^{(0)}$  разложения (20). Для этого при гауссовом пучке накачки на разные половины SLM2 подавались фазовые голограммы мод  $HG_{0n}$ , а затем измерялась скорость счета совпадений в детекторах. Ширина маски для детектирующих мод на SLM2 при этом подбиралась экспериментально по минимуму совпадений при корреляции мод  $HG_{00}$  и  $HG_{02}$  в первом и втором каналах соответственно. Измеренная ширина голограммы составила 170 пикселей, что соответствует перетяжке на кристалле  $\sigma = 26.1 \pm 1.2$  мкм. Это согласуется с теоретическим значением  $\sigma = \sqrt{2w\delta} = 24.8$  мкм. При такой ширине маски качество моды уже становится хуже, что заметно по изменению распределения интенсивности для  $HG_{02}$ , измеренному при помощи юстировочного ИК-лазера и ПЗС-камеры перед линзой L2 (в обратном по отношению к накачке направлении). Примеры таких распределений

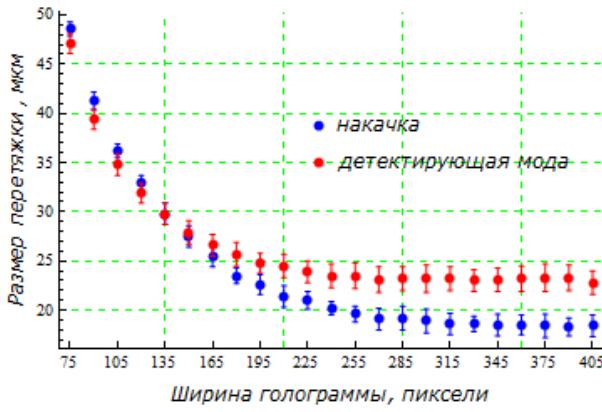


Рис. 17: График зависимости ширины перетяжки на кристалле от ширины голограммы на SLM для пучка накачки и детектирующей моды.

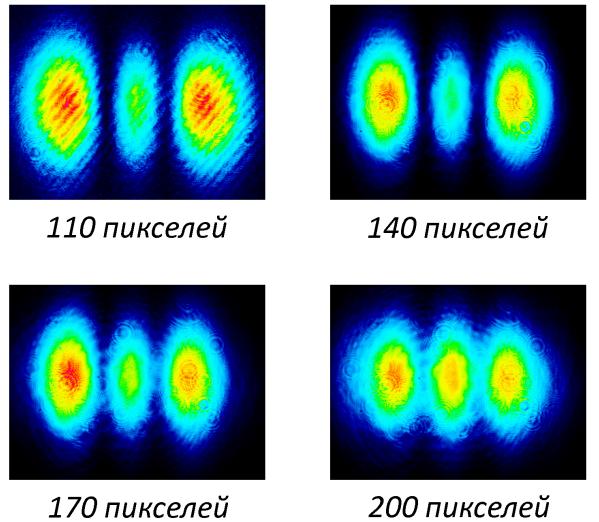


Рис. 18: Распределения интенсивности для детектирующей моды HG<sub>02</sub> в ближней зоне при различных ширинах голограмм: 110, 140, 170 и 200 пикселей.

для масок шириной 110, 140, 170 и 200 пикселей приведены на рис.18.

Тем не менее, измеренное распределение коэффициентов  $|C_{ab}^{(0)}|^2$  оказалось близко к желаемому, нормированная на максимум гистограмма для него приведена на рис.19. Отдельно на рис.20 приведена зависимость нормированной на максимум частоты сигнала в одном из каналов детектирования от порядка  $n$  выделяемой в нем моды за вычетом шумовых отсчетов. Зависимость для второго канала оказалась такой же с точностью до погрешности измерения, что говорит о хорошей юстировке. На том же графике приведена аналогичная зависимость и для совпадений в случае одинаковых детектирующих мод (диагональ распределения на рис.19).

Как видно, эти зависимости различаются. Это странно по той причине, что и скорость счета совпадений, и сигнал должны быть пропорциональны собственным значениям разложения по модам Шмидта (6). Действительно, скорость счета каждого из детекторов связана с редуцированными матрицами плотности сигнального и холостого фотонов как:  $R_s^{(n)} \propto \langle \psi_n | \rho^{(s)} | \psi_n \rangle \propto \lambda_n$ . В тоже время число совпадений пропорционально квадрату модуля проекции волновой функции бифотона на детектирующие моды:  $R_c^{(n)} \propto |\langle \psi_n | \langle \chi_n | |\Psi\rangle|^2 \propto \lambda_n$ . Оба распределения прекрасно аппроксимируются экспоненциальными зависимостями вида  $R_{s,c}^{(n)} = \text{const} \times \exp(-\gamma n)$  (квадрат коэффициента взаимной корреляции  $R^2 \geq 0.997$ ). Используя вы-

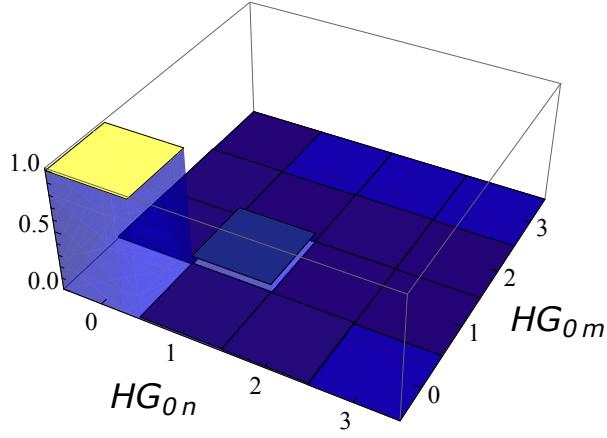


Рис. 19: Измеренные коэффициенты разложения по горизонтальным модам Гаусса-Эрмита  $|C_{nm}^{(0)}|^2$ .

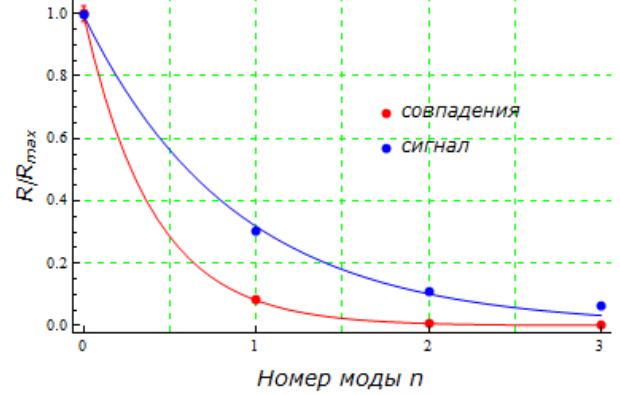


Рис. 20: График зависимостей сигнала и скорости счета совпадений от порядка моды  $n$ .

ражения (13) и (14) можно получить соотношение  $\lambda_{n+1}/\lambda n = (K_H - 1)/(K_H + 1)$  для собственных значений. Тогда экспериментальная оценка для числа Шмидта будет иметь следующий вид:

$$K_H = \frac{e^\gamma + 1}{e^\gamma - 1}. \quad (40)$$

Для сигнала она составила  $1.92 \pm 0.2$ , а для совпадений –  $1.18 \pm 0.1$ . Таким образом, теоретическое значение  $K_H = 1.4$  оказалось между этими двумя экспериментальными оценками, что говорит о наличии систематической ошибки при измерениях. Эта ошибка может быть связана с различной эффективностью работы амплитудных голограмм для мод разных порядков. К тому же оценка по единичным отсчетам очень чувствительна к вычитаемой из него величине засветки, которая составляла в среднем 30% сигнала. По этой причине оценка из поведения скорости счета совпадений вызывает больше доверия и будет использоваться в дальнейшем (случайные совпадения составляли  $10^{-5}$  от общего числа совпадений).

### 2.3.1 Случай накачки в моде Гаусса-Эрмита ненулевого порядка

Аналогичным образом были проведены измерения  $|C_{ab}^{(n)}|^2$  для ненулевых  $n$ . С помощью SLM1 пучок накачки преобразовывался в три моды Гаусса-Эрмита малого порядка: HG<sub>01</sub>, HG<sub>02</sub> и HG<sub>03</sub>. Нормированные гистограммы для экспериментальных данных приведены на рис. 21 слева вместе с гистограммой для HG<sub>00</sub>. На том же рисунке справа приведены результа-

ты численного расчета гистограмм для теоретических значений  $|C_{ab}^{(n)}|^2$  при  $K_H = 1.18$ .

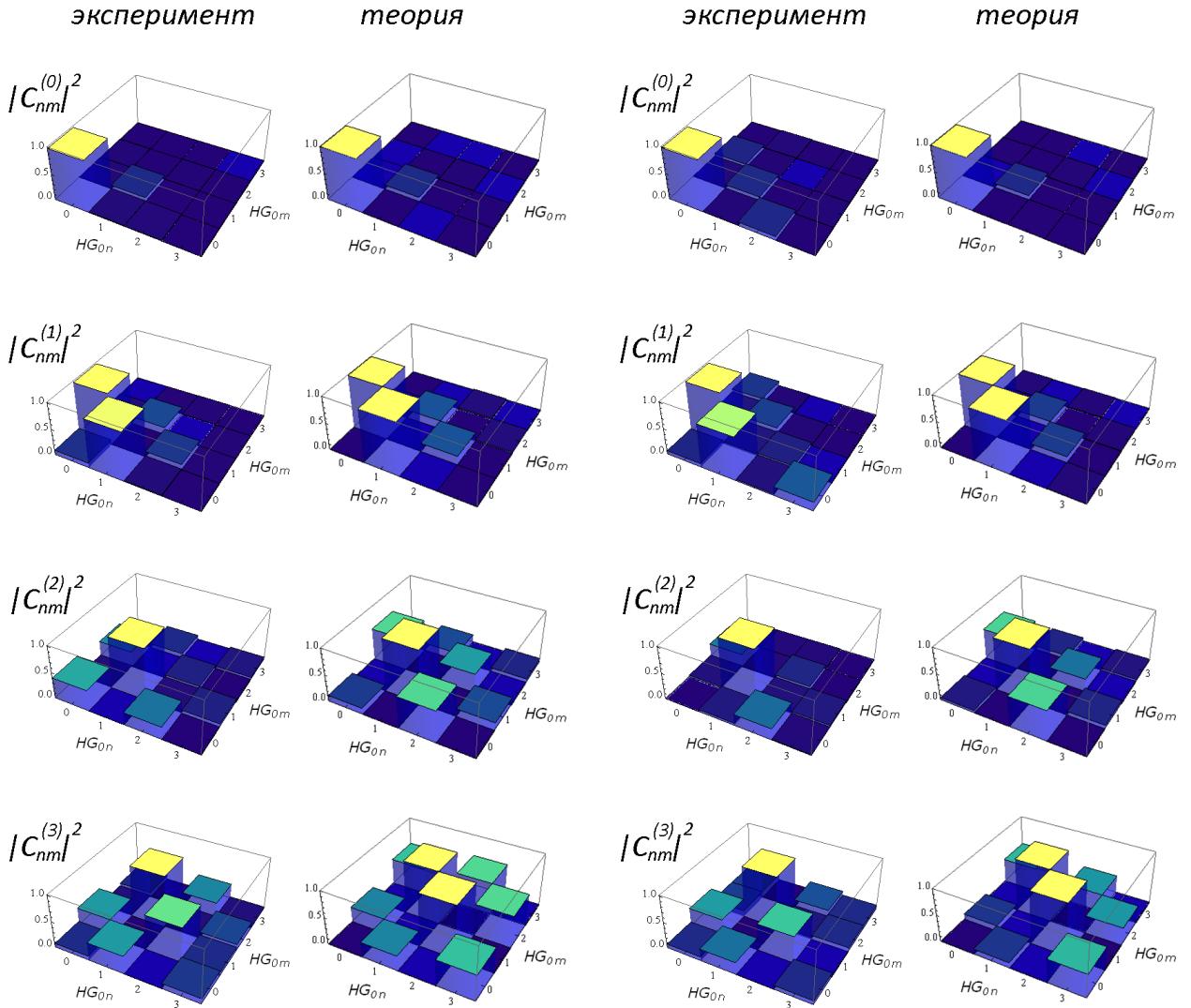


Рис. 21: Коэффициенты разложения по горизонтальным модам Гаусса-Эрмита  $|C_{nm}^{(0)}|^2$ ,  $|C_{nm}^{(1)}|^2$ ,  $|C_{nm}^{(2)}|^2$  и  $|C_{nm}^{(3)}|^2$  при  $\sigma = \sigma_{opt}$  : эксперимент (левый столбец) и теория (правый столбец).

Рис. 22: Коэффициенты разложения по горизонтальным модам Гаусса-Эрмита  $|C_{nm}^{(0)}|^2$ ,  $|C_{nm}^{(1)}|^2$ ,  $|C_{nm}^{(2)}|^2$  и  $|C_{nm}^{(3)}|^2$  при  $\sigma = 1.01\sigma_{opt}$  : эксперимент (левый столбец) и теория (правый столбец).

Те же измерения были проведены и для голограмм шириной 140 пикселей в детектирующих каналах. Размер перетяжки детектирующей моды на кристалле при этом составил  $28.7 \pm 1.1$  мкм, её отношение к эмпирически найденной оптимальной оказалось равно  $\sigma/\sigma_{opt} = 1.01$ . Аналогичные

рис.21 гистограммы для этого случая приведены на рис.22 .

Как видно, кроме заметной асимметрии измеренных коэффициентов относительно диагонали  $n = m$  для нечетных мод накачки, существует значительное качественное различие в поведении  $|C_{nm}^{(n)}|^2$  между экспериментом и теорией. Фактически можно говорить только об одинаковых тенденциях. К примеру, увеличение детектирующей перетяжки приводит к уменьшению коэффициентов  $|C_{00}^{(2)}|^2$ ,  $|C_{01}^{(3)}|^2$ ,  $|C_{23}^{(3)}|^2$  и росту  $|C_{02}^{(0)}|^2$ ,  $|C_{03}^{(1)}|^2$  (последнее почти незаметно визуально на приведенных теоретических гистограммах, но имеет место быть).

### 2.3.2 Неравенства Белла

Несмотря на неполное соответствие экспериментальных результатов расчетам, состояние, приготавливаемое при пучке накачки в моде HG<sub>01</sub>, весьма близко к чистому белловскому состоянию вида:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{HG}_{00}, \text{HG}_{01}\rangle + |\text{HG}_{01}, \text{HG}_{00}\rangle). \quad (41)$$

Как количественную меру соответствия между матрицей плотности полученного состояния  $\rho_{exp}$  и теоретической  $\rho_{th}$  можно выбрать величину под названием fidelity:

$$F(\rho, \rho_{th}) = \left( \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho_{th}} \rho \sqrt{\rho_{th}}} \right)^2. \quad (42)$$

Измеренные коэффициенты  $|C_{nm}^{(1)}|^2$  были приняты в качестве оценки собственных значений разложения Шмидта до третьей моды включительно, что позволило найти модули элементов  $\rho_{exp}$  ( поиск истинной  $\rho_{exp}$  требует полной томографии состояния в разных базисах). В итоге, значение подобной «fidelity» составило  $0.978 \pm 0.006$ , что позволило перейти к эксперименту по наблюдению нарушения неравенства Белла.

Для этого приготовленная белловская пара проецировалась на суперпозиции

$$|\theta_{s,i}\rangle = \cos\left(\frac{\theta_{s,i}}{2}\right) |\text{HG}_{00}\rangle + \sin\left(\frac{\theta_{s,i}}{2}\right) |\text{HG}_{01}\rangle \quad (43)$$

в сигнальном и холостом каналах, что позволяло наблюдать в сигнале совпадений  $R_c$  так называемые «белловские кривые»:

$$R_c \propto |\langle \theta_s | \langle \theta_i | |\Psi^+\rangle|^2 \propto \sin(\theta_s - \theta_i). \quad (44)$$

Измеренные для случаев  $\theta_i = 0$ ,  $\theta_i = \pi/4$ ,  $\theta_i = \pi/2$ ,  $\theta_i = 3\pi/4$  кривые представлены на рис.23, угол  $\theta_s$  в каждом случае изменялся от 0 до  $\pi$ . Коэффициенты  $R^2$  при аппроксимации функцией  $A(1 + \sin(\theta_s - \theta_i))$  составили 0.95, 0.90, 0.95 и 0.91 соответственно.

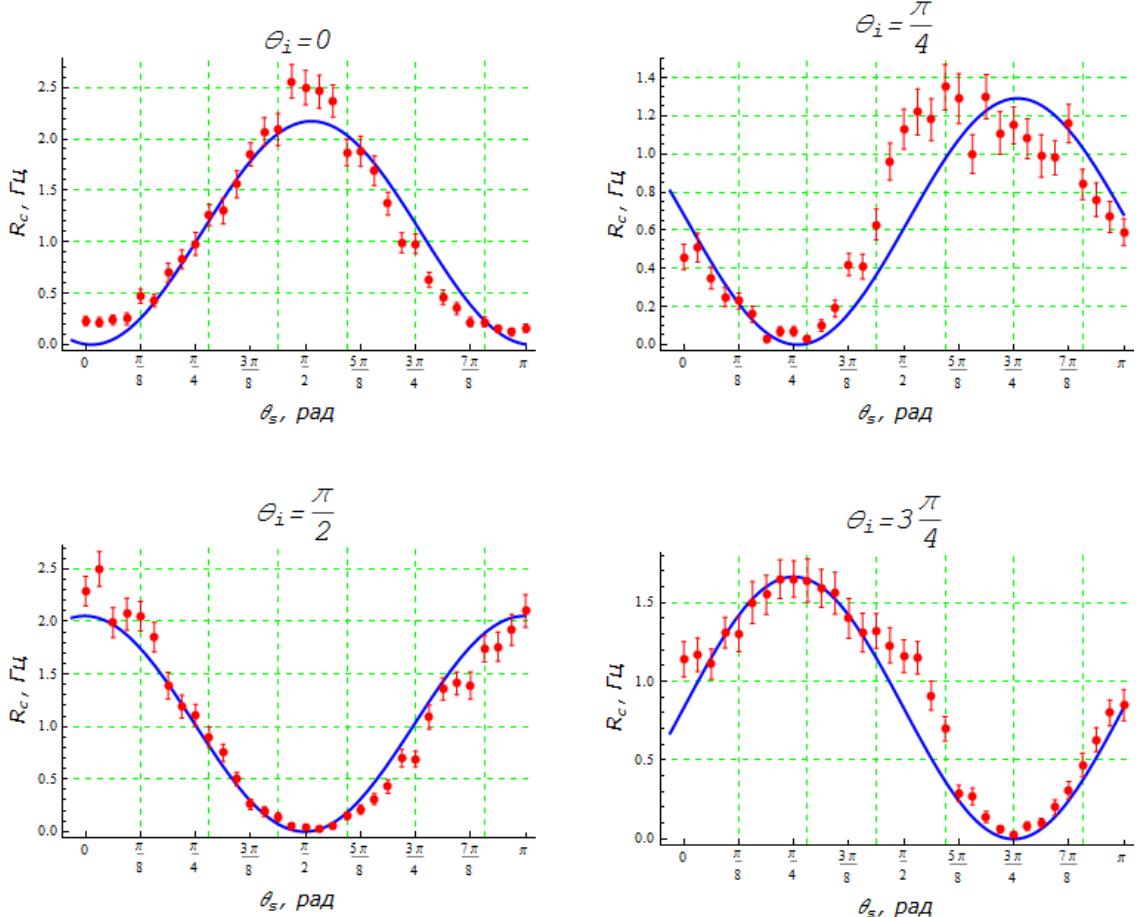


Рис. 23: Измеренные для четырех случаев кривые Белла:  $\theta_i = 0$ ,  $\theta_i = \pi/4$ ,  $\theta_i = \pi/2$ ,  $\theta_i = 3\pi/4$ . Угол  $\theta_s$  изменялся от 0 до  $\pi$ .

С на порядок большей длительностью усреднения, была измерена скорость счета совпадений при следующих тестовых углах:  $\theta_i = 0$ ,  $\theta'_i = \pi/4$ ,  $\theta'_s = \pi/8$ ,  $\theta_s = 3\pi/8$  и ортогональных им  $\theta_{i,s} + \pi/2$ ,  $\theta'_{i,s} + \pi/2$ . Как известно, в этих точках нарушение неравенства Белла должно быть наиболее существенно. Стоит отметить, что обычно измерения для проекций на состояния с углами  $\theta$ ,  $\theta'$  производятся одновременно с проекциями на ортогональные им состояния. К примеру, в случае поляризационных состояний, для этого используется по светоделителю и паре детекторов в каждом из каналов. В случае же пространственных мод такая возможность отсутствует.

Измеренные значения  $R_c(\theta_i, \theta_s)$  нормировались на полученные при аппроксимации амплитуды синусов  $A$ , после чего подставлялись в выражения:

$$E(\theta_i, \theta_s) = \frac{R_c(\theta_i, \theta_s) + R_c(\theta_i + \frac{\pi}{2}, \theta_s + \frac{\pi}{2}) - R_c(\theta_i, \theta_s + \frac{\pi}{2}) - R_c(\theta_i + \frac{\pi}{2}, \theta_s)}{R_c(\theta_i, \theta_s) + R_c(\theta_i + \frac{\pi}{2}, \theta_s + \frac{\pi}{2}) + R_c(\theta_i, \theta_s + \frac{\pi}{2}) + R_c(\theta_i + \frac{\pi}{2}, \theta_s)}.$$

Эти величины должны удовлетворять неравенству Белла в форме Клаузера-Хорна-Шимони-Холта  $-2 \leq S \leq 2$ , где  $S$ :

$$S = E(\theta_i, \theta_s) - E(\theta_i, \theta'_s) + E(\theta'_i, \theta_s) + E(\theta'_i, \theta'_s). \quad (45)$$

Полученное значение  $S$  составило  $2.50 \pm 0.07$ , однако, вид кривых Белла ставит под сомнение корректность подобных измерений. Принципиальная возможность получения кривых более высокого качества подтверждается результатами уже не раз упоминавшейся работы [26], в которой также наблюдались нарушения неравенства Белла в форме Клаузера-Хорна-Шимони-Холта для двумерного подпространства состояний с орбитальным угловым моментом  $l = \pm 2$  при гауссовой накачке и существенно многомодовом режиме генерации. Авторы этой работы также учитывали необходимость амплитудной модуляции при расчете голограмм и отдельно акцентировали на этом внимание.

## 2.4 Заключение и выводы

Таким образом, в ходе работы:

1. Проведен анализ различных способов расчета фазовых голограмм для генерации параксиальных пучков с произвольным составом пространственных мод.
2. Реализованы измерения кросс-корреляций между пространственными модами сигнального и холостого фотонов при СПР в базисе Гаусса-Эрмита при близком к единице числе Шмидта.
3. Исследованы изменения спектра пространственных мод СПР при преобразовании накачки в низшие моды Гаусса-Эрмита  $HG_{01}$ ,  $HG_{02}$  и  $HG_{03}$  путем измерения корреляций между модами. Проведено сравнение результатов измерений с теоретическими предсказаниями для амплитуды бифотона в приближении двойной гауссоиды.
4. Реализована генерация близкого к чистому белловскому состоянию  $|\Psi^+\rangle$  на основе пространственных степеней свободы фотона с последующим экспериментом по наблюдению нарушения неравенства Белла в форме Клаузера-Хорна-Шимони-Холта ( $S = 2.50 \pm 0.07 > 2$ ).

Полученные результаты могут быть улучшены путем более сильной фокусировки накачки в кристалл, что обеспечит достижения режима с одной модой Шмидта при ширине перетяжки  $\sim 11$  мкм. Подобный режим был опробован в ходе эксперимента, но значительное усиление поперечного сноса в кристалле приводило к сильному снижению полезного сигнала (сигнал в одном из каналов превышал сигнал в другом более чем в два раза). Возврат к такой схеме эксперимента был бы возможен при наличии кристалла-компенсатора. К тому же столь малые перетяжки усложняли задачу сопряжения детектирующих мод и моды накачки.

Также, судя по измеренным кривым Белла, доработки требует процесс генерации голограмм суперпозиций мод. Для этого можно воспользоваться как другими методами их расчета (представленные в упомянутых работах [32, 33]), так и различными адаптивными методами коррекции голограмм. Широкое распространение сейчас получил подход на основе известного в голографии GS-алгоритма (Gerchberg–Saxton algorithm) и его модификаций [36, 37]. Вопрос лишь в том, как реализовать обратную связь в рассмотренном случае.

Тем не менее полученные результаты продемонстрировали возможность получения в эксперименте ряда интересных пространственно-перепутанных состояний путем изменения формы поперечного профиля пучка накачки. В том числе возможность генерации чистого состояния Белла без предварительной постселекции, что может быть использовано, например, на практике в протоколе распределения ключа Экерта и подобных ему.

## Список литературы

- [1] M. Bourennane, A. Karlsson, G. Björk, N. Gisin, and N.J. Cerf. Quantum key distribution using multilevel encoding: security analysis. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(47):10065, 2002.
- [2] N.J. Cerf, M. Bourennane, A. Karlsson, and N. Gisin. Security of quantum key distribution using d-level systems. *Physical Review Letters*, 88(12):127902, 2002.
- [3] D. Kaszlikowski, P. Gnaciński, M. Żukowski, W. Miklaszewski, and A. Zeilinger. Violations of local realism by two entangled n-dimensional systems are stronger than for two qubits. *Physical Review Letters*, 85(21):4418–4421, 2000.

- [4] D. Collins, N. Gisin, N. Linden, S. Massar, and S. Popescu. Bell inequalities for arbitrarily high-dimensional systems. *Physical Review Letters*, 88(4):040404, 2002.
- [5] Д.Н. Клышко. *Фотоны и нелинейная оптика*. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.
- [6] C.K. Law, I.A. Walmsley, and J.H. Eberly. Continuous frequency entanglement: effective finite hilbert space and entropy control. *Physical Review Letters*, 84(23):5304, 2000.
- [7] M.V. Fedorov, M.A. Efremov, P.A. Volkov, E.V. Moreva, S.S. Straupe, and S.P. Kulik. Spontaneous parametric down-conversion: Anisotropical and anomalously strong narrowing of biphoton momentum correlation distributions. *Physical Review A*, 77(3):032336, 2008.
- [8] C.H. Monken, P.H. Souto Ribeiro, and S. Pádua. Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion. *Physical Review A*, 57:3123–3126, Apr 1998.
- [9] C.K. Law and J.H. Eberly. Analysis and interpretation of high transverse entanglement in optical parametric down conversion. *Physical Review Letters*, 92:127903, Mar 2004.
- [10] M.P. Van Exter, A. Aiello, S.S.R. Oemrawsingh, G. Nienhuis, and J.P. Woerdman. Effect of spatial filtering on the schmidt decomposition of entangled photons. *Physical Review A*, 74(1):012309, 2006.
- [11] K.W. Chan, J.P. Torres, and J.H. Eberly. Transverse entanglement migration in hilbert space. *Physical Review A*, 75(5):050101, 2007.
- [12] F. Just, A. Cavanna, M.V. Chekhova, and G. Leuchs. Transverse entanglement of biphotons. *New Journal of Physics*, 15(8):083015, 2013.
- [13] I.V. Dyakonov, P.R. Sharapova, T.Sh. Iskhakov, and G. Leuchs. Direct schmidt number measurement of high-gain parametric down conversion. *arXiv preprint arXiv:1405.6158*, 2014.
- [14] S.P. Walborn, S. Pádua, and C.H. Monken. Conservation and entanglement of hermite-gaussian modes in parametric down-conversion. *Physical Review A*, 71:053812, May 2005.

- [15] Xi-Feng Ren, Guo-Ping Guo, Jian Li, and Guang-Can Guo. Entanglement of the hermite–gaussian modes states of photons. *Physics Letters A*, 341(1):81–86, 2005.
- [16] S.P. Walborn and A.H. Pimentel. Generalized hermite–gauss decomposition of the two-photon state produced by spontaneous parametric down conversion. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 45(16):165502, 2012.
- [17] S.S. Straupe, D.P. Ivanov, A.A. Kalinkin, I.B. Bobrov, and S.P. Kulik. Angular schmidt modes in spontaneous parametric down-conversion. *Physical Review A*, 83:060302, Jun 2011.
- [18] S.P. Walborn, A.N. de Oliveira, S. Pádua, and C.H. Monken. Multimode hong-ou-mandel interference. *Physical Review Letters*, 90:143601, Apr 2003.
- [19] M.J. Padgett and J Courtial. Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum. *Optics letters*, 24(7):430–432, 1999.
- [20] L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, and J.P. Woerdman. Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Physical Review A*, 45:8185–8189, Jun 1992.
- [21] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, and A. Zeilinger. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature*, 412(6844):313–316, 2001.
- [22] J.P. Torres, A. Alexandrescu, and Lluis Torner. Quantum spiral bandwidth of entangled two-photon states. *Physical Review A*, 68(5):050301, 2003.
- [23] M.P. van Exter, W.H. Peeters, and Han P. Woerdman. Mode counting in high-dimensional orbital angular momentum entanglement. 2007.
- [24] H. Di Lorenzo Pires, HCB Florijn, and MP van Exter. Measurement of the spiral spectrum of entangled two-photon states. *Physical Review Letters*, 104(2):020505, 2010.
- [25] V.D. Salakhutdinov, E.R. Eliel, and W. Löffler. Full-field quantum correlations of spatially entangled photons. *Physical Review Letters*, 108(17):173604, 2012.
- [26] B. Jack, A.M. Yao, J. Leach, J. Romero, S. Franke-Arnold, D.G. Ireland, S.M. Barnett, and M.J. Padgett. Entanglement of arbitrary superpositions of modes within two-dimensional orbital angular momentum state spaces. *Physical Review A*, 81(4):043844, 2010.

- [27] A. Ling, A. Lamas-Linares, and C. Kurtsiefer. Absolute emission rates of spontaneous parametric down-conversion into single transverse gaussian modes. *Physical Review A*, 77(4):043834, 2008.
- [28] R.S. Bennink, Yun Liu, D.D. Earl, and W.P. Grice. Spatial distinguishability of photons produced by spontaneous parametric down-conversion with a focused pump. *Physical Review A*, 74(2):023802, 2006.
- [29] P.S.K. Lee, M.P. Van Exter, and J.P. Woerdman. How focused pumping affects type-ii spontaneous parametric down-conversion. *Physical Review A*, 72(3B):033803, 2005.
- [30] J. Leach, M.R. Dennis, J. Courtial, and M.J. Padgett. Vortex knots in light. *New Journal of Physics*, 7(1):55, 2005.
- [31] E. Bolduc, N. Bent, E. Santamato, E. Karimi, and R. Boyd. Exact solution to simultaneous intensity and phase encryption with a single phase-only hologram. *Optics letters*, 38(18):3546–3549, 2013.
- [32] Victor Arrizón. Optimum on-axis computer-generated hologram encoded into low-resolution phase-modulation devices. *Optics letters*, 28(24):2521–2523, 2003.
- [33] A. Dudley, R. Vasilyeu, V. Belyi, N. Khilo, P. Ropot, and A. Forbes. Controlling the evolution of nondiffracting speckle by complex amplitude modulation on a phase-only spatial light modulator. *Optics Communications*, 285(1):5–12, 2012.
- [34] G.O. Rytikov and M.V. Chekhova. Detection of two-mode compression and degree of entanglement in continuous variables in parametric scattering of light. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 107(6):923–932, 2008.
- [35] Д. Н. Никогосян. Кристаллы для нелинейной оптики (справочный обзор). *Квантовая электроника*, 4(1):5–26, 1977.
- [36] Pei-Jung Wu, Chien-Yue Chen, Qing-Long Deng, Hsuan T Chang, Bor-Shyh Lin, and Guan-Syun Huang. Integral computer-generated hologram via a modified gerchberg-saxton algorithm. *Journal of Optics*, 17(1):015701, 2015.
- [37] Sudheesh K Rajput and Naveen K Nishchal. Fresnel domain nonlinear optical image encryption scheme based on gerchberg–saxton phase-retrieval algorithm. *Applied optics*, 53(3):418–425, 2014.