

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

**АДАПТИВНАЯ БАЙЕСОВСКАЯ ТОМОГРАФИЯ В
СИСТЕМАХ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ**

Выполнил студент

427 группы:

Погорелов И. А.

Научный руководитель:

м. н. с., к. ф.-м. н. Страупе С. С.

Допущен к защите 30.05.2016

Зав. кафедрой, профессор Панов В. И.

Москва, 2016

Содержание

Введение	4
1 Основные понятия	5
1.1 Эволюция квантовой системы	5
1.2 χ -матрица	7
1.3 Изоморфизм Чои-Жамиолковского	9
1.4 Меры различия для процессов	9
2 Томография квантовых процессов	11
2.1 Стандартная томография квантовых процессов	12
2.2 Томография квантовых процессов со вспомогательной системой	13
2.3 Характеризация квантовой динамики напрямую	14
2.4 Томография интегрально-оптических чипов	16
3 Байесовский метод	20
3.1 Описание метода	20
3.2 Аппроксимация распределения	21
3.3 Повторная выборка из распределения	22
3.3.1 Метод Метрополиса-Гастингса (Metropolis-Hastings)	23
3.3.2 Метод Лиу-Веста (Liu-West)	24
3.3.3 Сравнение	26
3.4 Адаптивность	29
3.5 Элементы программной реализации	30
3.5.1 Генерация χ -матриц	30
3.5.2 Реализация случайного блуждания	31
4 Эксперимент	32

4.1	Установка	32
4.2	Калибровка волновых пластинок	34
5	Результаты	37
5.1	Эксперимент	40
5.1.1	Единичный процесс	40
5.1.2	Поляризатор	45
5.1.3	Волновая пластинка	46
5.1.4	Зеркала	48
5.1.5	Волновод в интегрально-оптическом чипе	49
5.2	Симуляции	52
	Заключение	54

Введение

Томография квантовых процессов необходима для отладки и проверки качества квантовых логических вентилях и является необходимым инструментом для практической разработки квантовых компьютеров. По алгоритмической сложности томография квантовых процессов в системе размерности d эквивалентна сложности томографии квантовых состояний в системе размерности d^2 , что позволяет называть томографию квантовых процессов даже в системе размерности 2 случаем высоких размерностей.

В данной работе рассматривается применение байесовских статистических методов к задаче томографии квантовых процессов. Целью работы была реализация адаптивного байесовского алгоритма томографии процессов с последующим применением для экспериментальной томографии преобразования поляризации в интегрально-оптических чипах. Основными задачами работы являются:

- Расширение программной реализации томографии квантовых состояний на случай сохраняющих след квантовых процессов.
- Создание экспериментальной установки для томографии однокубитных поляризационных квантовых процессов.
- Томография поляризационных процессов, происходящих в волноводе на основе интегрально-оптических чипов.
- Сравнение методов повторной выборки из распределения с целью ускорения работы программной реализации в случае высоких размерностей.
- Рассмотрение адаптивных стратегий измерения для томографии квантовых процессов.

1 Основные понятия

1.1 Эволюция квантовой системы

Эволюцию квантовой системы можно рассматривать как действие квантового процесса на начальное состояние ρ [1]. В наиболее простом случае квантовый процесс, действующий в гильбертовом пространстве размерности d , может быть описан унитарной матрицей U размером $d \times d$. Тогда состояние системы после воздействия процесса $\mathcal{E}(\rho)$ можно представить следующим образом:

$$\mathcal{E}(\rho) = U\rho U^\dagger. \quad (1)$$

Такой подход годится для описания эволюции замкнутой квантовой системы. Однако, зачастую, интерес ко всей замкнутой системе отсутствует, и рассматривается лишь малая её часть, эволюция которой уже не может быть описана унитарным преобразованием. Изначальную замкнутую систему можно разделить на две условные части: “система” и “окружение”. Матрицу плотности основной системы ρ можно получить взятием частичного следа от матрицы плотности изначальной замкнутой системы ρ_{full} по переменным окружения:

$$\rho = \text{Tr}_{env}(\rho_{full}). \quad (2)$$

В результате, согласно формулам (1), (2), эволюцию произвольной системы можно представить в виде:

$$\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_{env}(U\rho_{full}U^\dagger). \quad (3)$$

Для дальнейшего упрощения формулы (3) можно допустить, что в начальный момент состояние полной системы представимо в виде тензорного произведения частей:

$$\rho_{full} = \rho \otimes \rho_{env}. \quad (4)$$



Рисунок 1: Схематическое изображение эволюции замкнутой системы (слева) и произвольной системы (справа).

Данное допущение может быть обоснованно тем фактом, что в большинстве практических задач система готовится экспериментатором в определённом, строго заданном состоянии. Таким образом, итоговое выражение имеет вид:

$$\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_{env}[U(\rho \otimes \rho_{env})U^\dagger]. \quad (5)$$

Выражение (5) можно упростить, если ввести базис $|e_k\rangle$ для системы-окружения. Начальное состояние окружения можно считать чистым $|e_0\rangle\langle e_0|$, т.к. в противном случае окружение можно расширить до чистого состояния, используя процедуру очищения (purification). Тогда формула (5) примет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\rho) &= \sum_k \langle e_k|U(\rho \otimes |e_0\rangle\langle e_0|)U^\dagger|e_k\rangle = \\ &= \sum_k E_k \rho E_k^\dagger, \end{aligned} \quad (6)$$

где $E_k = \langle e_k|U|e_0\rangle$. Выражение (6) называют “представлением операторной суммой”, а E_k — операторами Крауса. В общем случае, утверждение о том, что отображение из пространства комплексных матриц $n \times n$ в пространство комплексных матриц $m \times m$ сохраняет положительную определённость тогда и только тогда, когда оно представимо в виде (6) (где E_k — матрицы $m \times n$), известно как теорема Чои (Choi) [2].

На операторы E_k наложено важное ограничение, которое учитывает тот факт, что квантовое преобразование не увеличивает след матрицы

ПЛОТНОСТИ:

$$\sum_k E_k^\dagger E_k \leq I. \quad (7)$$

Для сохраняющих след преобразований $\sum_k E_k^\dagger E_k = I$. Следует также отметить, что для наглядности матрицу U можно представить в блочном виде:

$$U = \begin{pmatrix} (E_1) & \dots & \dots & \dots \\ (E_2) & \dots & \dots & \dots \\ (E_3) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Оставшаяся часть матрицы должна обеспечивать унитарность, но в остальном она выбирается произвольно. В общем случае достаточно d^2 операторов Крауса, чтобы представить произвольный процесс. Таким образом, матрица U имеет размер $d^3 \times d^3$ в общем случае.

1.2 χ -матрица

Иногда удобно использовать представление квантового процесса слегка отличное от (6). Чтобы получить это представление, разложим E_k по некоторому фиксированному базису:

$$E_i = \sum_{m=1}^{d^2} e_{im} \tilde{E}_m. \quad (9)$$

После подстановки в (6) получаем:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{m,n=1}^{d^2} \tilde{E}_m \rho \tilde{E}_n^\dagger \chi_{mn}, \quad (10)$$

где $\chi_{mn} = \sum_i e_{im} e_{in}^*$. Выражение (10) известно как представление χ -матрицей (иногда “Choi form”). Данная матрица размером $d^2 \times d^2$ является эрмитовой и положительно определённой. Такое представление

удобно для эксперимента и программной реализации, т. к. оперирует с массивом чисел, а не с операторами. Более того, эрмитовость матрицы позволяет сократить количество переменных. Выберем базис в виде $\tilde{E}_m = |i\rangle\langle j|$. Тогда, вводя двух-индексную нотацию, ($m \in \overline{1, d^2} \leftrightarrow \{i, i'\} \in \overline{1, d}$) получаем:

$$(\mathcal{E}(\rho))_{ij} = \sum_{k,l=1}^d \rho_{kl} \chi_{ik,jl}. \quad (11)$$

Условие сохранения следа (7) превращается в:

$$\sum_{i=1}^d \chi_{ik,il} = \delta_{kl}. \quad (12)$$

В наглядных образах это означает, что сумма матриц размера $d \times d$, лежащих на главной диагонали, равна единичной матрице.

Отдельного внимания заслуживают унитарные преобразования. Согласно формуле (1), в представлении операторной суммой для унитарных преобразований присутствует только один оператор Крауса. Тогда χ -матрица имеет вид: $\chi_{mn} = e_{1m} e_{1n}^*$. Данный вид можно свести к разложению по сингулярным числам (singular value decomposition, SVD) $\chi = U\Lambda V^*$, где U, V — унитарные матрицы, а Λ — диагональная. Для этого возьмём Λ в виде $\Lambda_{mn} = \delta_{1m} \delta_{mn}$. Тогда

$$\chi_{mn} = \sum_l U_{ml} \Lambda_{ll} V_{ln}^* = U_{m1} \Lambda_{11} V_{1n}^* = e_{1m} e_{1n}^*.$$

Поскольку сингулярные числа квадратной матрицы однозначно определяются с точностью до порядка следования, необходимым и достаточным условием унитарности процесса является условие:

$$\text{rank}(\chi) = 1. \quad (13)$$

Также нетрудно показать, что можно восстановить операторы Крауса по χ -матрице с помощью матрицы D_{ji} , диагонализующей χ ($\chi_{mn} =$

$\sum_{x,y=1}^{d^2} D_{mx} d_x \delta_{xy} D_{ny}^*$), следующим образом:

$$E_i = \sqrt{d_i} \sum_{j=1}^{d^2} D_{ji} \tilde{E}_j. \quad (14)$$

1.3 Изоморфизм Чои-Жамиолковского

Существует взаимно-однозначное соответствие между процессами \mathcal{E} и состояниями в расширенном пространстве, известное как изоморфизм Чои-Жамиолковского (Choi-Jamiolkowski isomorphism [2, 3, 4]). Процессу \mathcal{E} ставится в соответствие матрица плотности состояния:

$$\rho_{\mathcal{E}} = [\mathcal{E} \otimes \mathcal{I}] (|\Psi\rangle\langle\Psi|), \quad (15)$$

где $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=1}^d |j\rangle \otimes |j\rangle$ — максимально перепутанное чистое состояние, \mathcal{I} — неизменяющий состояние процесс. Состояние $\rho_{\mathcal{E}}$ напрямую связано с матрицей процесса $\chi_{\mathcal{E}}$:

$$\begin{aligned} (\rho_{\mathcal{E}})_{ii',jj'} &= ([\mathcal{E} \otimes \mathcal{I}] (|\Psi\rangle\langle\Psi|))_{ii',jj'} = \frac{1}{d} \sum_{k,l} (\mathcal{E}[|k\rangle\langle l|])_{ij} (\mathcal{I}[|k\rangle\langle l|])_{i'j'} = \\ &= \frac{1}{d} \sum_{k,l,k',l'} (\chi_{\mathcal{E}})_{ik',jl'} \delta_{k'k} \delta_{l'l} \delta_{ki} \delta_{lj'} = \frac{1}{d} (\chi_{\mathcal{E}})_{ii',jj'}. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, χ -матрица процесса совпадает с состоянием $\rho_{\mathcal{E}}$ с точностью до множителя $1/d$.

1.4 Меры различия для процессов

Существуют разные подходы к выбору меры различия для квантовых процессов [5]. Все подходы основаны на мерах различия для состояний. Рассмотрим основные из них:

1. *Следовая метрика:*

$$D(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} \text{Tr} |\rho - \sigma|. \quad (17)$$

2. *Фиделити (fidelity)*:

$$F(\rho, \sigma) = (\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}})^2. \quad (18)$$

Фиделити широко распространена, хотя не является метрикой. На её основе легко можно построить метрики. Например: $A(\rho, \sigma) = \arccos \sqrt{F(\rho, \sigma)}$, $C(\rho, \sigma) = \sqrt{1 - F(\rho, \sigma)}$.

3. *Метрика Бюреса*:

$$B(\rho, \sigma) = \sqrt{2 - 2\sqrt{F(\rho, \sigma)}}. \quad (19)$$

Метрика Бюреса — наиболее распространённая метрика, основанная на фиделити. Обобщение метрики Бюреса на состояния с неединичным следом [6]:

$$B_{gen}(\rho, \sigma) = \sqrt{\text{Tr}(\rho) + \text{Tr}(\sigma) - 2\sqrt{F(\rho, \sigma)}}. \quad (20)$$

Для формирования меры различия процессов Δ_{pro} можно использовать любую из приведённых выше мер различия состояний Δ_{st} . Основные подходы к формированию меры различия процессов на основе мер различия для состояний следующие:

1. *Использование изоморфизма Чои-Жамиолковского*: за меру различия процессов принимается мера различия для состояний, соответствующих этим процессам согласно изоморфизму Чои-Жамиолковского (15):

$$\Delta_{pro}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \Delta_{st}(\rho_{\mathcal{E}}, \rho_{\mathcal{F}}). \quad (21)$$

Стоит отметить, что этот подход эквивалентен использованию обобщённой метрики Бюреса (20) для χ -матриц, если $\Delta_{st} = B$:

$$\Delta_{pro}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = B_{gen}(\chi_{\mathcal{E}}, \chi_{\mathcal{F}}). \quad (22)$$

2. *Среднее по входным состояниям:*

$$\Delta_{pro}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \int \Delta_{st}(\mathcal{E}(\rho), \mathcal{F}(\rho)) d\rho. \quad (23)$$

Интеграл здесь берётся по всевозможным входным состояниям (с использованием какой-либо меры на пространстве матриц плотности).

3. *Наихудшее из входных состояний:*

$$\Delta_{pro}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \max_{\rho} \Delta_{st}(\mathcal{E}(\rho), \mathcal{F}(\rho)). \quad (24)$$

Максимум берётся по всевозможным входным состояниям. В случае, если в качестве Δ_{st} используется фиделити или аналогичная ей мера различия в том смысле, что она тем больше, чем более похожи состояния, нужно брать минимум.

В работе используется метод, основанный на изоморфизме Чои-Жамиolkовского (21). Выбор был сделан в пользу этого метода, поскольку он является наиболее простым с вычислительной точки зрения, а принципиальной разницы между методами нет.

2 Томография квантовых процессов

Основной задачей томографии квантовых процессов (Quantum Process Tomography, QPT) является полное описание неизвестного процесса. В качестве инструментов томографии допускается варьирование начального состояния системы и последующие измерения. Это задаётся конфигурацией установки α . Требуется определить функциональную зависимость $\mathcal{E}(\rho)$ выходного состояния $\rho' = \mathcal{E}(\rho)$ от входного ρ . Согласно секции 1 для этого достаточно определить все операторы Крауса или χ -матрицу процесса. В сущности, томография квантовых процессов может



Рисунок 2: Принципиальная схема томографии квантовых процессов

быть сведена к томографии квантовых состояний, получившихся после действия процесса на набор начальных состояний, образующих базис в пространстве матриц плотности. Далее будут рассмотрены основные методы томографии квантовых процессов.

2.1 Стандартная томография квантовых процессов

Стандартная томография квантовых процессов (Standard Quantum Process Tomography, SQPT) по сути является методом линейной инверсии для томографии квантовых состояний. Для начала приготавливаются d^2 линейно-независимых начальных состояний ρ_j . Они образуют базис в пространстве матриц плотности, а значит, любое состояние может быть выражено через их линейную комбинацию. Далее на каждое из состояний базиса действует квантовый процесс, и производится томография всех состояний ρ'_j , получившихся после действия неизвестного процесса. На основе этих данных можно предсказать действие данного процесса на любое состояние в силу линейности. Более того, не составляет труда вычислить χ -матрицу процесса. Разложим состояния ρ'_j по базису:

$$\mathcal{E}(\rho_j) = \rho'_j = \sum_{k=1}^{d^2} \lambda_{jk} \rho_k.$$

Аналогично, согласно (10):

$$\tilde{E}_m \rho_j \tilde{E}_n^\dagger = \sum_{k=1}^{d^2} \beta_{jk}^{mn} \rho_k,$$

$$\sum_{k=1}^{d^2} \sum_{m,n=1}^{d^2} \chi_{mn} \beta_{jk}^{mn} \rho_k = \sum_{k=1}^{d^2} \lambda_{jk} \rho_k.$$

Учитывая линейную независимость ρ_k , получаем уравнение на χ , которое решается методами линейной алгебры:

$$\sum_{m,n=1}^{d^2} \chi_{mn} \beta_{jk}^{mn} = \lambda_{jk}. \quad (25)$$

Данный метод описан в работе [7] и экспериментально воплощён на примере системы с ядерным магнитным резонансом в работе [8], а так же в оптических системах [9, 10].

2.2 Томография квантовых процессов со вспомогательной системой

(Ancilla-assisted Quantum Process Tomography, ААРТ) Этот метод подразумевает использование некой вспомогательной системы (ancillary system) для томографии [11]. При этом, вспомогательная часть системы не изменяет своего состояния. В результате, расширенная система подвергается процессу $\mathcal{E} \otimes \mathcal{I}$. Далее производится томография итогового состояния расширенной системы, и по этим данным восстанавливается χ -матрица неизвестного процесса. Количество измерений в данном подходе остаётся таким же, как и в стандартной томографии квантовых процессов, поскольку томографируется одно состояние большей размерности. Однако, преимущество подхода в том, что необходимо приготавливать только одно начальное состояние, хотя и большей размерности.

Существуют некоторые ограничения на начальное состояние расширенной системы. Для уточнения ограничений требуется ввести понятие ранга Шмидта для операторов [12]. Определим скалярное произведение операторов $(M, N) \equiv \text{Tr}(M^\dagger N)$. Это позволяет говорить об ортонорми-

рованном базисе операторов. Оператор M , действующий на составную систему AB может быть представлен в виде операторного разложения Шмидта:

$$M = \sum_l s_l A_l \otimes B_l. \quad (26)$$

s_l — неотрицательные действительные числа, A_l, B_l - ортонормированные базисы операторов в подсистемах A и B соответственно. Количество ненулевых членов в разложении (26) $Sch(M)$ называется числом Шмидта или рангом Шмидта оператора (Schmidt Number). Состояние, которое используется в качестве начального для томографии квантовых процессов со вспомогательной системой, должно иметь ранг Шмидта d_A^2 , где d_A — размерность Гильбертова пространства основной системы (система A на Рис. 3):

$$Sch(\rho) = Sch(\rho_{base} \otimes \rho_{anc}) = d_A^2. \quad (27)$$

Данное условие эквивалентно условию однозначной разрешимости системы линейных уравнений, которая составляется на основе данных томографии итогового состояния. Отсюда так же вытекает условие для вспомогательной системы: её размерность должна быть не меньше d_A , т.к. иначе не удастся получить требуемый ранг Шмидта начального состояния. Условию (27) удовлетворяют почти любые начальные состояния (в том смысле что неудовлетворяющие условию состояния имеют меру ноль), однако максимально перепутанные состояния дают меньшую погрешность оценки неизвестной матрицы процесса при фиксированном количестве (времени) измерений [13].

2.3 Характеризация квантовой динамики напрямую

(Direct characterisation of Quantum Dynamics) Особенностью этого метода является отсутствие необходимости томографии выходных состоя-

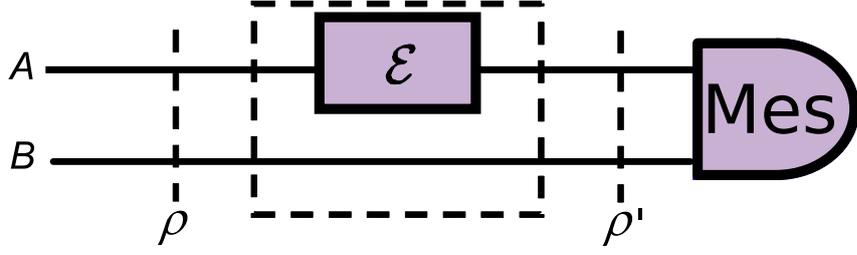


Рисунок 3: Принципиальная схема ААПТ

ний [14, 15]. Используется та же схема, что и в томографии квантовых процессов со вспомогательной системой (Рис. 3), однако состояния и измерения выбираются таким образом, чтобы напрямую получать элементы χ -матрицы.

Рассмотрим данную процедуру на примере томографии однокубитного процесса. Для начала, введём следующие обозначения:

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle),$$

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle).$$

Для измерения диагональных элементов χ -матрицы в качестве начального состояния следует выбрать максимально перепутанное состояние $|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$. Используя проективные измерения $P_{0,1,2,3}$, отвечающие векторам $|\Phi^+\rangle, |\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle, |\Phi^-\rangle$ соответственно, получаем, согласно правилу Борна [16]:

$$p_m = \text{Tr}[P_m(\mathcal{E} \otimes I(\rho))] = \chi_{mm}. \quad (28)$$

Вероятности p_m наблюдаются в эксперименте. Чтобы определить недиагональные элементы, следует использовать начальное состояние, которое не является максимально перепутанным. Например, для определения χ_{03} можно взять $\rho = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$ ($\alpha, \beta \notin 0, 1/\sqrt{2}$) и проектор $P = P_0 + P_4$. Тогда получим:

$$\text{Tr}[P(\mathcal{E} \otimes I(\rho))] = \chi_{00} + \chi_{33} + 2 \text{Re}(\chi_{03}) \text{Tr}[(\sigma_z \otimes I)\rho].$$

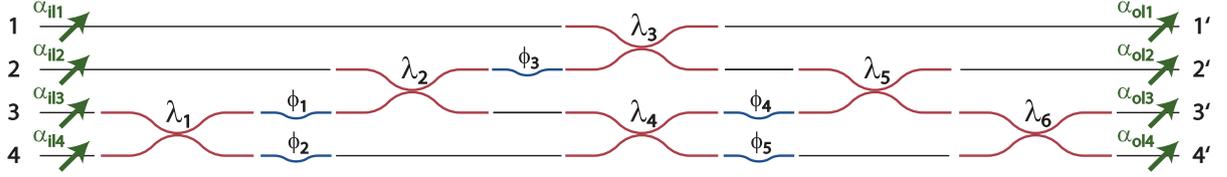


Рисунок 4: Разложение интегрально-оптического чипа 4×4 на светоделители λ и фазовые задержки ϕ .

χ_{00} и χ_{33} уже известны из предыдущих измерений. Аналогичным образом определяются мнимая часть χ_{03} и остальные элементы.

2.4 Томография интегрально-оптических чипов

Методы томографии интегрально-оптических чипов заметно отличаются от томографии процессов в общем виде [17, 18, 19]. Главное отличие заключается в том, что неизвестный процесс рассматривается унитарным. Дальнейшее восстановление существенно опирается на этот факт. Зачастую, используется идея о представлении произвольной унитарной матрицы $N \times N$ с помощью матриц светоделителя с фазовой задержкой в одном из плеч [20]. Такие матрицы имеют вид (λ отвечает за коэффициенты отражения/пропускания, ϕ за фазовую задержку):

$$\begin{pmatrix} e^{i\phi} \sin \lambda & e^{i\phi} \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Пример такого представления для интегрально-оптического чипа приведён на Рис. 4.

Основные принципы определения параметров интегрально-оптических чипов можно рассмотреть на примере работы [18]. Для начала, будем считать потери на заведение излучение в чип нулевыми, тогда матрица чипа M_{jk} связывает входное когерентное состояние на j -м входе α_j с выходным на k -м выходе β_k следующим образом:

$$\beta_k = \sum_{j=1}^N M_{jk} \alpha_j. \quad (30)$$

Элементы матрицы M являются комплексными числами: $M_{jk} = r_{jk} e^{i\theta_{jk}}$. Восстановление матрицы M происходит в 2 этапа:

1. *Определение амплитуд:*

На вход j посылается когерентное состояние с интенсивностью I , на остальных входах — вакуумные состояния. Измеряется интенсивность I_k на выходе k . Тогда амплитуды матрицы можно определить, исходя из формулы:

$$r_{jk} = \sqrt{\frac{I_k}{I}}. \quad (31)$$

Процедура повторяется для всех пар $\{j, k\}$.

2. *Определение фаз:*

Когерентное состояние посылается на 50 : 50 светоделитель, затем пучки отправляется на входы 1 и j (Рис. 5). В пучок, идущий на вход j вносится регулируемая фазовая задержка ϕ . Измеряется интенсивность I_k на k -м выходе:

$$I_k = I |M_{1k} + M_{jk} e^{i\phi}|^2. \quad (32)$$

Без потери общности можно считать $\theta_{1k} = 0$. Тогда

$$I_1 = I(r_{11}^2 + r_{j1}^2 + 2r_{11}r_{j1} \cos(\phi)), \quad k = 1, \quad (33)$$

$$I_k = I(r_{1k}^2 + r_{jk}^2 + 2r_{1k}r_{jk} \cos(\phi + \theta_{jk})), \quad k \neq 1. \quad (34)$$

При варьирование фазового сдвига ϕ интенсивности на выходах меняются. Находя максимум значения I_1 , определяется положение

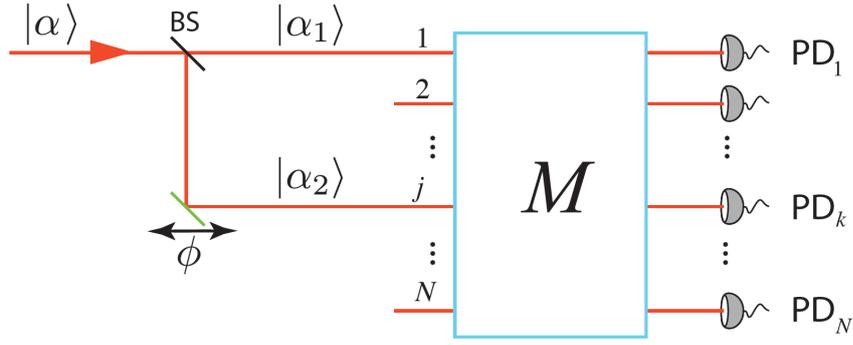


Рисунок 5: Для определения фазы когерентное состояние посылается на 50 : 50 светоделитель. Далее пучки посылаются на входы 1 и j . В пучок, идущий на вход j , вносится контролируемая фазовая задержка ϕ .

фазового сдвига, при котором $\phi = 0$. Далее по максимуму значения I_k можно определить θ_{jk} :

$$\theta_{jk} = 2\pi - \phi. \quad (35)$$

Также можно учесть потери при заведении излучения в чип. Для этого можно добавить по N виртуальных входов и выходов к чипу $N \times N$, получится чип $2N \times 2N$. На входы $1..N$ добавляются светоделители, которые имитируют потери при заведении излучения в чип (Рис. 6). Каждый из светоделителей описывается матрицей:

$$S_j = \begin{pmatrix} \eta_j & -\sqrt{1 - \eta_j^2} \\ \sqrt{1 - \eta_j^2} & \eta_j \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Общая матрица из N светоделителей выглядит следующим образом:

$$S_{tot} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} & -\tilde{\boldsymbol{\eta}} \\ \tilde{\boldsymbol{\eta}} & \boldsymbol{\eta} \end{pmatrix}, \quad (37)$$

где $\boldsymbol{\eta} = \text{diag}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)$, $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \text{diag}(\sqrt{1 - \eta_1^2}, \sqrt{1 - \eta_2^2}, \dots, \sqrt{1 - \eta_N^2})$.

Итоговая матрица V , учитывающая саму матрицу B чипа $N \times N$, полу-

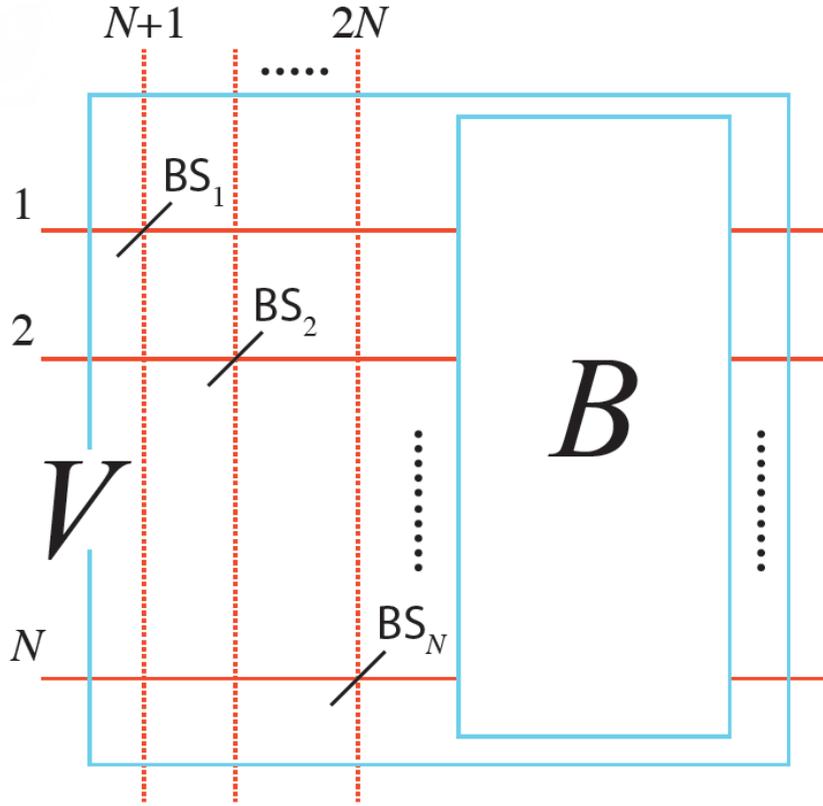


Рисунок 6: Для учёта потерь на заведение излучения в чип можно ввести N дополнительных воображаемых входов и выходов, получив тем самым чип $2N \times 2N$ вместо $N \times N$. Потери учитываются за счёт добавления N светоделителей в изначальные каналы.

чается произведением матриц:

$$V = S_{tot} \times \begin{pmatrix} B & O \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta B & -\tilde{\eta} \\ \tilde{\eta} B & \eta \end{pmatrix}, \quad (38)$$

где O — $N \times N$ матрица из нулей, I — $N \times N$ единичная матрица. Используя описанную выше процедуру, можно определить матрицу $M = \eta B$. Чтобы извлечь из неё информацию о матрице B , которая задаёт интегрально оптический чип, необходимо знать потери на входе η . Их можно определить, подавая на вход j когерентное состояние с интенсивностью

I и измеряя интенсивности на выходах I_k :

$$\eta_j = \sqrt{\frac{1}{I} \sum_{k=1}^N I_k}. \quad (39)$$

3 Байесовский метод

3.1 Описание метода

Применения байесовского метода к томографии квантовых состояний рассматривалось в работах [21, 22]. Основным объектом байесовского метода является распределение вероятностей на пространстве неизвестных параметров системы. Это распределение эволюционирует с получением новых данных о системе. Применительно к томографии квантовых состояний основным источником информации являются измерения. Вероятность \mathbb{P} получить исход γ в измерении описывается правилом Борна[16]:

$$\mathbb{P}(\gamma|\rho, \alpha, \mathcal{M}) = \text{Tr}(M_{\alpha\gamma}\rho). \quad (40)$$

Здесь α обозначает конфигурацию экспериментальной установки, а \mathcal{M} - POVM операторы измерения, для которых выполняется условие $\sum_{\gamma=1}^{\Gamma} M_{\alpha\gamma} = I$.

Для системы с неизвестным процессом данное выражение модифицируется следующим образом:

$$\mathbb{P}(\gamma|\chi, \alpha, \rho_0, \mathcal{M}) = \text{Tr}(M_{\alpha\gamma}\mathcal{E}(\rho_\alpha)) \quad (41)$$

Допускается использование разных начальных состояний ρ_0 . Далее входное состояние преобразуется томографической установкой в ρ_α . И \mathcal{M} , и ρ_α , задаются конфигурацией установки, поэтому ρ_0 и \mathcal{M} можно исключить из записи (41), подразумевая, что они входят в α . Запишем функцию правдоподобия, описывающую вероятность получить статистику \mathcal{D}

при наличии процесса с данной χ -матрицей:

$$\mathcal{L}(\chi; \mathcal{D}) = \prod_{n=1}^N \mathbb{P}(\gamma|\chi, \alpha_n). \quad (42)$$

Широко распространён метод максимального правдоподобия (MLE), в котором решается задача на поиск максимума функции правдоподобия по физически доступной области параметров. Для томографии квантовых процессов метод был использован в работах [23, 24].

Для работы байесовского подхода задаётся априорное распределение $p(\chi|\emptyset)$. Априорное распределение отражает изначальное знание о системе. Затем распределение эволюционирует с получением данных измерений по следующему из формулы Байеса ($\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$) правилу:

$$p(\chi|\mathcal{D}) \propto \mathcal{L}(\chi; \mathcal{D})p(\chi|\emptyset). \quad (43)$$

В качестве оценки χ -матрицы томографируемого процесса можно взять среднее по распределению:

$$\hat{\chi} = \int p(\chi|D)d\chi. \quad (44)$$

Также, довольно интуитивно можно оценить погрешность восстановления как размер распределения в метрике $d(\chi_1, \chi_2)$:

$$\hat{d} = \sqrt{\int d(\chi, \hat{\chi})^2 p(\chi|D)d\chi}. \quad (45)$$

3.2 Аппроксимация распределения

Вычисление апостериорного распределения по формуле (43), включающее в себя вычисление многомерного нормировочного интеграла, является трудоёмкой задачей с вычислительной точки зрения. В связи с этим, в задачах квантовой томографии нашли применение алгоритмы семейства Монте-Карло, в частности, алгоритм последовательной выборки по

значимости (Sequential Importance Sampling, SIS) [25]. В SIS распределение $p(\chi|\mathcal{D}_n)$ аппроксимируется конечным числом точек χ_s (samples) $s \in \overline{1..S}$, которым присваиваются соответствующие веса $w_s^{(n)}$ ($\sum_{s=1}^S w_s^{(n)} = 1$):

$$p(\chi|\mathcal{D}_n) \approx \sum_{s=1}^S w_s^{(n)} \delta(\chi - \chi_s). \quad (46)$$

При такой аппроксимации вычислить апостериорное распределение становится сильно проще. Действительно, по формуле (43):

$$\begin{aligned} p(\chi|\alpha_{n+1}, \gamma_{n+1}, \mathcal{D}_n) &= \frac{\mathbb{P}(\gamma_{n+1}|\chi, \alpha_{n+1})p(\chi|\mathcal{D}_n)}{\int \mathbb{P}(\gamma_{n+1}|\chi, \alpha_{n+1})p(\chi|\mathcal{D}_n)d\chi} \approx \\ &\approx \sum_{s=1}^S \frac{\mathbb{P}(\gamma_{n+1}|\chi_s, \alpha_{n+1})w_s^{(n)}}{\sum_{r=1}^S \mathbb{P}(\gamma_{n+1}|\chi_r, \alpha_{n+1})w_r^{(n)}} \delta(\chi - \chi_s) = \sum_{s=1}^S w_s^{(n+1)} \delta(\chi - \chi_s). \end{aligned} \quad (47)$$

Таким образом, для реализации эволюции аппроксимирующего распределения достаточно домножить каждый из весов на соответствующую вероятность, а затем нормировать получившиеся веса, поделив на их сумму. Такая процедура пересчёта распределения является быстрой, однако, с эволюцией распределения, вес некоторых точек становится близким к нулю. Качество аппроксимации падает и требуется осуществить повторную выборку из распределения (resampling).

3.3 Повторная выборка из распределения

О качестве аппроксимации распределения можно судить по эффективному размеру распределения, определённого как:

$$S_{eff} = \left(\sum_{s=1}^S w_s^2 \right)^{-1}. \quad (48)$$

Когда эффективный размер распределения становится слишком маленьким, требуется осуществить повторную выборку. Алгоритм повторной выборки из распределения (χ_s, w_s) заключается в следующем:

1. Создаётся новое распределение из такого же числа точек S . В качестве новой точки χ'_t берётся одна из старых точек χ_k , где $k = s$ с вероятностью w_s .
2. Каждая точка нового распределения подвергается случайному блужданию, согласно заданному алгоритму.
3. Всем точкам присваиваются одинаковые веса $w'_t = 1/S$. Таким образом эффективный размер S_{eff} становится максимальным.

В результате данной процедуры, основные характеристики распределения сохраняются, при этом, точки с малыми весами отбрасываются. Точность процедуры сильно зависит от алгоритма случайного блуждания. В работе рассматриваются два метода случайного блуждания.

3.3.1 Метод Метрополиса-Гастингса (Metropolis-Hastings)

Данный алгоритм был предложен в статье [26]. Особенностью алгоритма является необходимость знания функции распределения $p(\chi)$, которую требуется аппроксимировать. Каждая точка χ нового распределения совершает шаг в случайном направлении, становясь точкой χ' . Данное “шагание” должно удовлетворять требованию симметричности, т.е. вероятность шагнуть в точку χ' из точки χ должна быть равна вероятности шагнуть в точку χ из точки χ' : $Q(\chi|\chi') = Q(\chi'|\chi)$. Далее точка χ' принимается в качестве новой точки с вероятностью a :

$$a = \begin{cases} 1, & \text{при } p(\chi')/p(\chi) > 1 \\ p(\chi')/p(\chi), & \text{при } p(\chi')/p(\chi) < 1 \end{cases}. \quad (49)$$

Следующий шаг производится из точки χ' , если она принята, иначе из точки χ . В работе осуществляется 50 шагов для каждой точки. Сложность представляет нахождение функции распределения в новой точке

$p(\chi')$, поскольку новая точка может не содержаться в старом распределении, и восстановить функцию распределения в этой точке по весам из старого распределения нельзя. Для вычисления $p(\chi')$ нужно хранить историю измерений и осуществлять расчёт по формуле (43). Этот момент является основным недостатком метода, поскольку сильно увеличивает время вычисления.

3.3.2 Метод Лиу-Веста (Liu-West)

В данном методе [27] требуется знание лишь среднего по распределению $\vec{\mu}_0$ и матрицы ковариации Σ_0 распределения. Далее каждая точка χ нового распределения заменяется на точку χ' , выбранную из гауссового распределения с заданным центром и ковариацией. Однако центр и ковариация для каждой точки различаются и не совпадают с соответствующими параметрами всего распределения. Для каждой точки центр распределения смещён к самой точке:

$$\vec{\mu} = a\vec{\chi} + (1 - a)\vec{\mu}_0. \quad (50)$$

Ковариация, в свою очередь, тоже изменена:

$$\Sigma = (1 - a^2)\Sigma_0. \quad (51)$$

Запись $\vec{\chi}$ подразумевает запись параметров матрицы процесса в виде столбца. Величина a является параметром алгоритма. В работах [27, 28] предлагается использовать значение $a = 0.98$, однако для целей томографии хорошо себя показало значение $a = 0.5$. Эти два значения будут рассмотрены в сравнении.

Для программной реализации выборки из гауссового распределения с заданной ковариацией использовались следующие рассуждения. Предположим, что имеется столбец \vec{x} некоррелированных случайных величин

с гауссовым распределением $(0,1)$ (нулевое среднее и единичная дисперсия). Требуется получить столбец \vec{y} с заданной ковариацией C . Предположим, что столбцы связаны преобразованием:

$$\vec{y} = A\vec{x}. \quad (52)$$

При такой связи \vec{y} будет иметь гауссово распределение. Выберем A таким образом, чтобы получить нужную ковариацию:

$$y_i = \sum_k A_{ik}x_k, \quad (53)$$

$$\overline{x_k x_l} = \delta_{kl}, \quad (54)$$

$$C_{ij} = \overline{y_i y_j} = \sum_{k,l} A_{ik} A_{jl} \overline{x_k x_l} = \sum_k A_{ik} A_{jk}, \quad (55)$$

$$C = AA^\dagger. \quad (56)$$

Таким образом, матрицу A можно получить, применив к матрице C разложение Холецкого — представление матрицы в виде (56), где A — нижняя треугольная матрица с положительными действительными элементами на диагонали. Генерация столбца \vec{x} является стандартной процедурой.

Подбор значения параметра a производился на основе результатов применения данного алгоритма к задаче томографии квантового состояния. Для этого производились численные симуляции томографии квантового состояния. В качестве истинного состояния выбиралось случайное состояние из гильбертового пространства размерности 4, далее производилось усреднение результатов по разным состояниям. Зависимость расстояния между истинным состоянием и средним состоянием по распределению (44) в метрике Бюреса (20) аппроксимировалась по формуле $CN^{-\alpha}$, где N — число измерений. Зависимость параметра аппроксимации α представлена на Рис. 7. При значениях $a < 0.7$ (примерно)

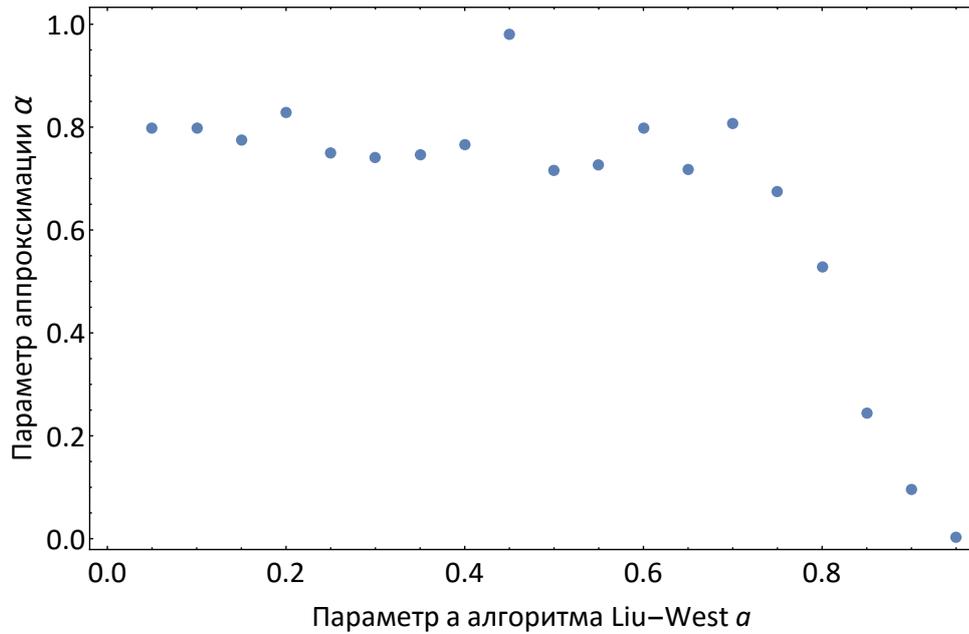


Рисунок 7: Зависимость расстояния между истинным состоянием и средним состоянием по распределению (44) в метрике Бюреса аппроксимировалась по формуле $CN^{-\alpha}$, где N — число измерений. На графике представлена зависимость параметра аппроксимации α , усреднённого по нескольким проходам томографии, от параметра алгоритма a .

томография проходит наиболее успешно, т.к. чем больше α , тем быстрее томография сходится к истинному состоянию. В связи с этим, для применения алгоритма Лиу-Веста к задаче томографии было выбрано значение $a = 0.5$.

3.3.3 Сравнение

Для сравнения методов было сгенерировано некое распределение, состоящее из комбинации гауссовых функций. Распределение задано точками с весами, точки распределены равномерно по квадратной области $x, y \in [-1, 1]$. Далее производится повторная выборка из распределения двумя разными методами, задача которой — отбросить точки с маленькими весами, а так же передвинуть точки таким образом, чтобы их плот-

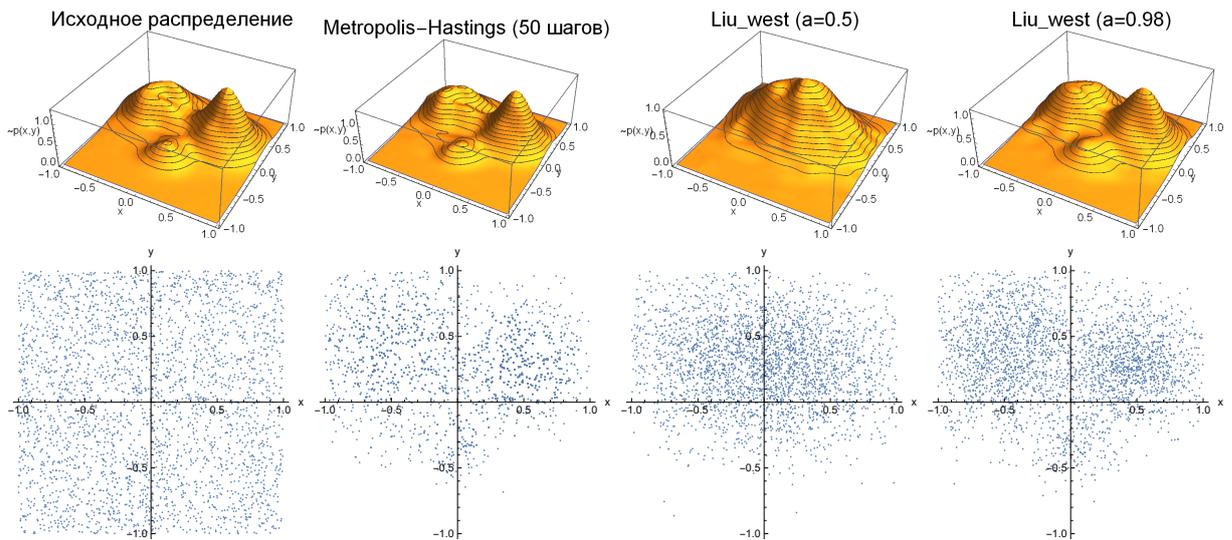


Рисунок 8: Сравнение алгоритмов повторной выборки из распределения. В верхнем ряду приведены графики плотности вероятности до и после повторной выборки разными методами. В нижнем ряду - расположение точек распределения на плоскости xy

ность задавала плотность вероятности распределения при том, что их веса равны. На Рис. 8 приведено исходное распределение и результаты повторной выборки по Метрополису-Гастингсу (50 шагов) и Лиу-Весту ($a \in \{0.5, 0.98\}$). Так же приводятся распределения точек по xy -плоскости до и после повторной выборки. Алгоритм Метрополиса-Гастингса аппроксимирует распределение более точно, однако, он работает существенно дольше, чем алгоритм Лиу-Веста. Это является особенно критичным в задаче томографии, т.к. для вычисления истинной функции распределения, которая требуется для алгоритма Метрополиса-Гастингса, нужно хранить историю измерений и пересчитывать вероятность для каждого шага алгоритма. Несмотря на менее качественную аппроксимацию распределения алгоритма Лиу-Веста при значении $a = 0.5$, для задачи томографии было выбрано именно это значение, поскольку оно обеспечивает наилучшую сходимость томографии к истинному состоянию. Вопрос о статистических свойствах распределения после использования алгорит-

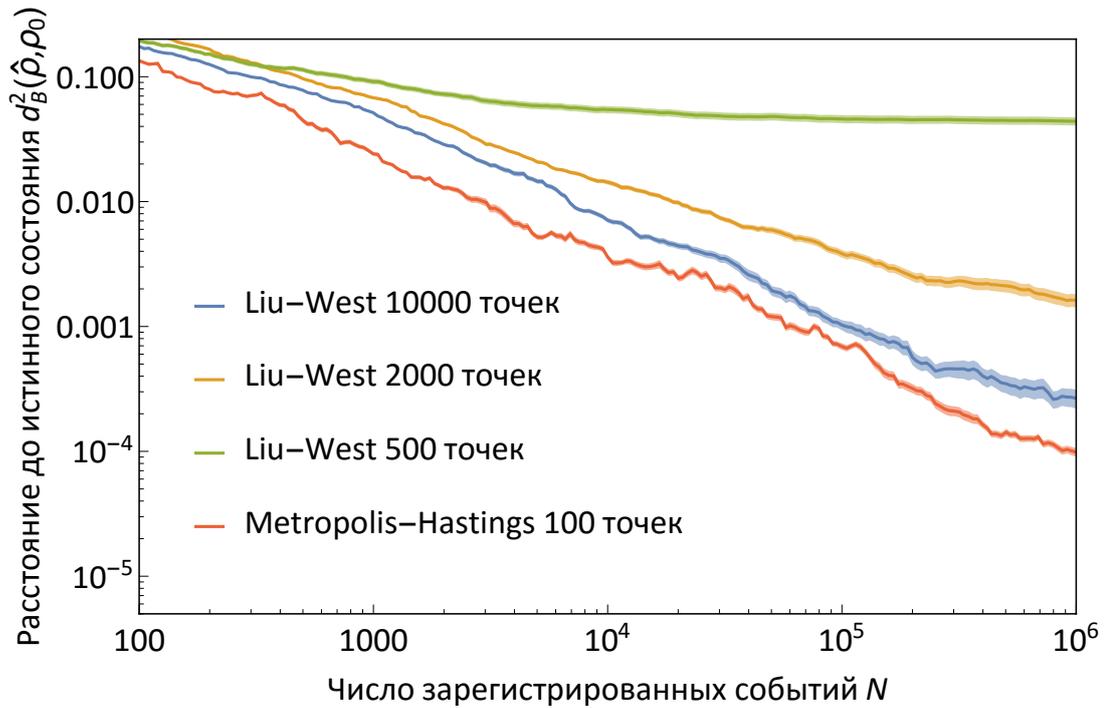


Рисунок 9: Сравнение сходимостей алгоритмов случайного блуждания в задаче томографии. Для успешной сходимости томографии к истинному состоянию алгоритму Лиу-Веста ($a = 0.5$) требуется на два порядка больше точек (10000) для аппроксимации распределения чем алгоритму Метрополиса-Гастингса (100).

ма Лиу-Веста при различных значениях a не исследовался.

Основной проблемой алгоритма Метрополиса-Гастингса в задаче томографии является большое время вычисления. Алгоритм Лиу-Веста рассматривался именно с целью решить эту проблему, т.к. по точности он однозначно проигрывает алгоритму Метрополиса-Гастингса. Но оказалось, что для успешной сходимости томографии к истинному состоянию алгоритму Лиу-Веста требуется на два порядка больше точек для аппроксимации распределения (10000) чем алгоритму Метрополиса-Гастингса (100). На Рис. (9) приведено сравнение сходимости томографии для разного числа точек в распределении. При примерно равной точности, томография с использованием алгоритма Метрополиса-Гастинг-

са (100 точек) выполняется в 4.8 раза быстрее чем с использованием алгоритма Лиу-Веста (10000 точек).

Таким образом, в качестве основного алгоритма случайного блуждания для задачи томографии квантовых процессов был выбран алгоритм Метрополиса-Гастингса.

3.4 Адаптивность

Адаптивность подразумевает зависимость выбора следующего измерения от данных, собранных во время предыдущих измерений. Требуется выбрать следующее измерение таким образом, чтобы оно принесло как можно больше информации о неизвестном процессе. Для этого в работе [22] предложен критерий, основанный на энтропии Шеннона \mathbb{H} :

$$\alpha_{next} = \operatorname{argmax}_{\alpha \in \mathcal{A}} \{ \mathbb{H}[p(\chi|\mathcal{D})] - \mathbb{E}_{p(\gamma|\alpha, \hat{\chi})}[\mathbb{H}[p(\chi|\gamma, \alpha, \mathcal{D})]] \}. \quad (57)$$

Следующее измерение выбирается максимально уменьшающим энтропию Шеннона, т.е. минимизирующее нашу степень незнания о системе. Убыль энтропии Шеннона при результате γ в измерении α задаётся выражением $\mathbb{H}[p(\rho|\mathcal{D})] - \mathbb{H}[p(\rho|\gamma, \alpha, \mathcal{D})]$. Поскольку результат γ заранее не известен, производится усреднение по всевозможным результатам $\mathbb{E}_{p(\gamma|\alpha, \hat{\chi})}[\dots]$. Обозначение $(\dots|\hat{\chi})$ подчёркивает, что истинный процесс во время томографии неизвестен и вероятность результата γ можно предсказывать по среднему по распределению процессу $\hat{\chi}$, который является оценкой истинного процесса на основе данных \mathcal{D} , собранных к данному шагу.

Формула (57) подразумевает вычисление энтропии многомерных распределений для всех возможных исходов γ . Такая задача видится трудоёмкой, поэтому предлагается эквивалентная формула для нахождения

наилучшего следующего измерения:

$$\alpha_{next} = \operatorname{argmax}_{\alpha \in \mathcal{A}} \{ \mathbb{H}[\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \hat{\chi})] - \mathbb{E}_{p(\chi|\mathcal{D})}[\mathbb{H}[\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \chi)]] \}. \quad (58)$$

Здесь вычисляется энтропия распределения среднего состояния $\hat{\chi}$ по исходам γ при конфигурации установки α и средняя энтропия распределения по исходам для каждой точки χ из аппроксимирующего распределения.

3.5 Элементы программной реализации

3.5.1 Генерация χ -матриц

Для программной реализации байесовского метода необходимо генерировать точки распределения. В случае квантовых процессов эти точки являются χ -матрицами. Поскольку χ -матрицы обладают определёнными свойствами, то и алгоритм их генерации должен выдавать матрицы, обладающие этими свойствами. Основную трудность вызывает условие сохранения (или неувеличения) следа (7). Для преодоления этой трудности можно воспользоваться связью χ -матрицы с операторами Крауса (10). Операторы Крауса, удовлетворяющие условию сохранения следа, можно сгенерировать используя их связь с матрицей U (6),(8), описывающей эволюцию в расширенной системе. Таким образом, требуется уметь генерировать унитарные матрицы U . Для этого можно использовать QR -разложение — представление произвольной матрицы G в виде:

$$G = QR, \quad (59)$$

где Q — унитарная матрица, R — верхнетреугольная. Простейший способ реализовать QR -разложение — провести ортогонализацию Грамма-Шмидта для матрицы G . Полученную матрицу Q можно использовать

в качестве U . Более того, если взять матрицу G из ансамбля матриц Жинибре (Ginibre) [29] (все элементы матрицы являются независимыми случайными величинами с гауссовым распределением с нулевым средним и одинаковой дисперсией), то сгенерированные матрицы U будут распределены равномерно по мере Хаара (Haar) [30].

Подводя итог, можно выделить следующие этапы генерации χ -матрицы, сохраняющей след:

1. Генерация унитарной матрицы U , с помощью QR разложения.
2. Определение операторов Крауса E_k по матрице U из вида (8).
3. Вычисление χ -матрицы, исходя из (10).

Для генерации χ -матриц, неувеличивающих след, достаточно добавить в набор операторов Крауса оператор E_∞ и учитывать его в суммировании $\sum_k E_k^\dagger E_k = I$. Этот дополнительный оператор обеспечит уменьшение следа.

3.5.2 Реализация случайного блуждания

Для реализации алгоритма случайного блуждания по Метрополису-Гастингсу требуется генерировать точку χ' в окрестности заданной точки χ . Для этого можно воспользоваться обратной связью χ -матрицы с операторами Крауса (14). Восстановив операторы Крауса E_k по заданной матрице χ можно воссоздать первые d столбцов матрицы U (8). Далее дадим малое приращение каждому элементу первых d столбцов матрицы U . В качестве приращения возьмём случайные величины с гауссовым распределением с нулевым средним и дисперсией Δ (данный параметр отвечает за то, насколько точка χ' будет удалена от точки χ). Проведём ортогонализацию Грамма-Шмидта для первых d столбцов получившей-

ся матрицы, получим первые d столбцов матрицы U' . Дальнейшие действия повторяют описанные в разделе о генерации χ матриц: по первым d столбцам матриц U' определим новые операторы Крауса E'_k , а по ним новую матрицу χ' .

4 Эксперимент

Необходимость экспериментальной томографии квантовых процессов в нашей группе возникла в связи с задачей изготовления волноводов в интегрально-оптических чипах. Томография необходима для контроля качества созданных волноводов, например, при изготовлении волоконного поляризационного светоделителя на основе интегральных чипов.

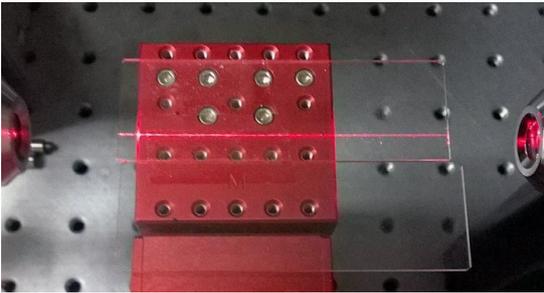


Рисунок 10: Волновод в интегральном чипе



Рисунок 11: Волоконный светоделитель на основе интегрального чипа

4.1 Установка

Томография квантовых процессов экспериментально реализована для поляризационных степеней свободы фотонов. Схема экспериментальной установка представлена на Рис. 12. Излучение диодного лазера с длиной волны 808 нм пропускается через одномодовое волокно SMF для создания гауссового пучка. Далее излучение поляризуется призмой Глана GP,

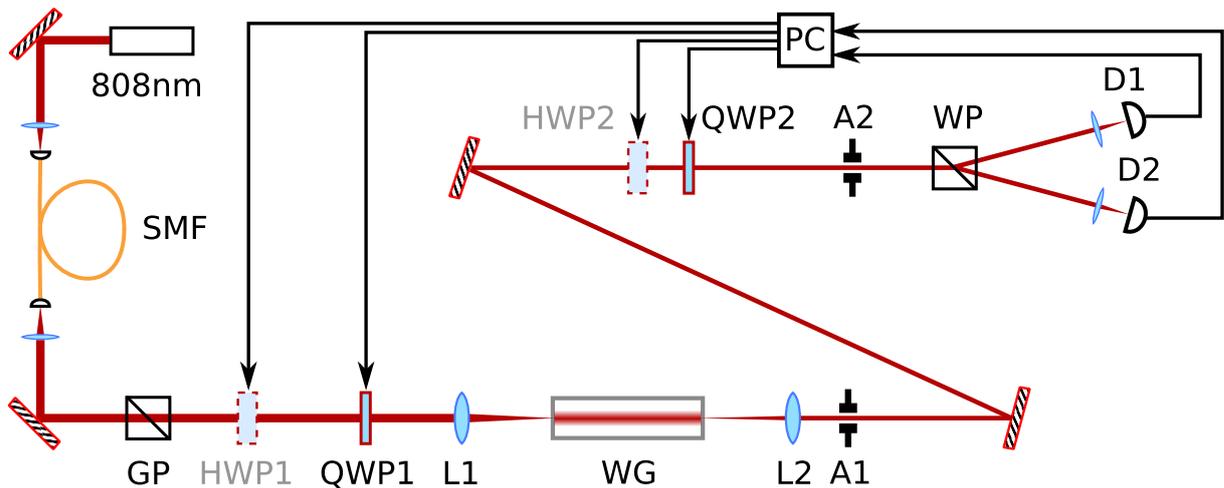


Рисунок 12: Схема экспериментальной установки.

и с помощью волновых пластинок HWP1, QWP1 приготавливается начальное состояние ρ_α . Пучок фокусируется в волновод WG, где с ним происходит неизвестный поляризационный процесс χ , который требуется протомографировать. Полученное после процесса состояние измеряется с помощью волновых пластинок HWP2, QWP2 и призмы Волластона WP. Диафрагмы A1, A2 служат для пространственной модовой фильтрации излучения, которое проходит через чип, не попадая в волновод. Излучение детектируется с помощью модулей счёта фотонов D1, D2 на основе лавинных фотодиодов компании Laser Components. Детекторы и волновые пластинки связаны с компьютером PC, за счёт чего реализуется адаптивность томографии. Волновые пластинки снабжены шаговыми двигателями и датчиком Холла для выставления опорной нулевой точки пластинок. Перед каждым измерением компьютер устанавливает волновые пластинки в требуемое положение. Иногда полуволновые пластинки HWP1, HWP2 вообще не используются.

4.2 Калибровка волновых пластинок

В установке (Рис. 12) используются 4 кварцевые фазовые пластинки HWP1, HWP2, QWP1, QWP2. Для точности томографии достаточно критичны значения сдвигов фаз пластинок и определение положения оси, поэтому производилась отдельная калибровка каждой из пластинок. Преобразование, осуществляемое пластинкой, можно описать матрицей Джонса [31]. Рассмотрим вид матрицы M для волновой пластинки, которая вносит сдвиг фаз δ между медленной и быстрой осями и повернутой под углом ϕ к горизонтали, в базисе $\{|H\rangle, |V\rangle\}$. Если $\phi = 0$, то пластинка просто вносит сдвиг фаз между $|H\rangle$ и $|V\rangle$ компонентами (считаем горизонтальную ось быстрой):

$$|\psi'\rangle = \begin{pmatrix} \exp(-i\delta/2) & 0 \\ 0 & \exp(i\delta/2) \end{pmatrix} |\psi\rangle. \quad (60)$$

Чтобы получить общий вид при $\phi \neq 0$ достаточно повернуть базис на угол ϕ до осей пластинки, внести сдвиг фаз по формуле (60), а затем, вернуть базис обратно, повернув на угол $-\phi$:

$$|\psi'\rangle = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-i\delta/2) & 0 \\ 0 & \exp(i\delta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} |\psi\rangle \quad (61)$$

Таким образом, матрица Джонса волновой пластинки имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \exp(i\delta/2) \cos^2 \phi + \exp(-i\delta/2) \sin^2 \phi & i \sin(2\phi) \sin(\delta/2) \\ i \sin(2\phi) \sin(\delta/2) & \exp(-i\delta/2) \cos^2 \phi + \exp(i\delta/2) \sin^2 \phi \end{pmatrix} \quad (62)$$

Для калибровки можно установить волновую пластинку между призмой Глана (пропускает $|H\rangle$) и призмой Волластона (пропускает в один канал $|H\rangle$, в другой $|V\rangle$). Тогда интенсивности в каналах после призмы

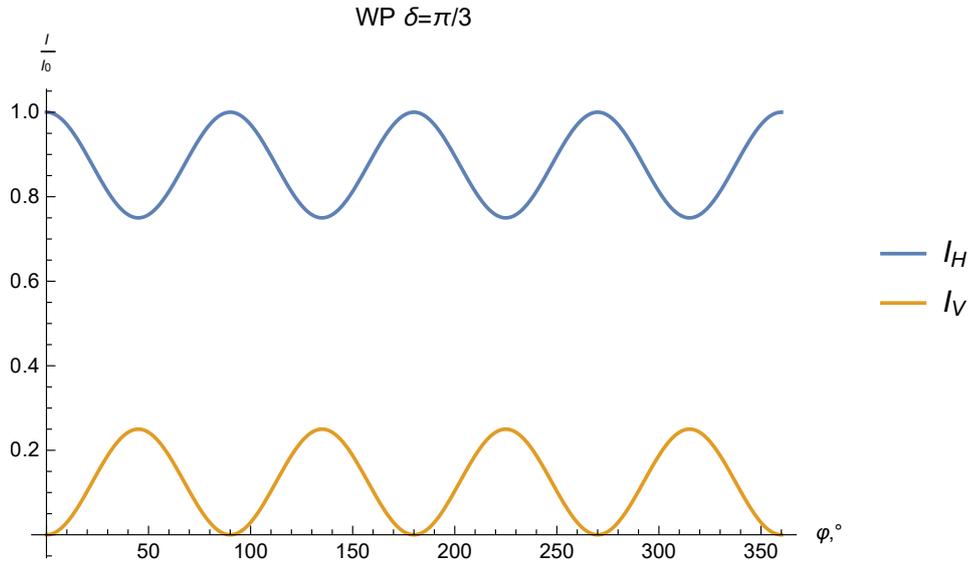


Рисунок 13: Зависимость интенсивностей в каналах после призмы Волластона для волновой пластинки со сдвигом фаз между осями $\delta = \pi/3$, стоящей между призмой Глана (пропускает H), от угла ϕ между одной из осей пластинки и горизонталью. Точки - экспериментальные данные, сплошная линия - аппроксимация по формуле (63).

Волластона будут описываться формулами:

$$\begin{aligned}
 I_H &= I_0 \times |\langle H|M|H\rangle|^2 = I_0 \times \frac{1}{4}(3 + \cos 4\phi + 2 \cos \delta \sin^2 2\phi) \\
 I_V &= I_0 \times |\langle V|M|H\rangle|^2 = I_0 \times \sin^2 \frac{\delta}{2} \sin^2 2\phi
 \end{aligned} \tag{63}$$

На Рис. 13 изображён характерный вид зависимостей (63) (волновая пластинка $\delta = \pi/3$). Сдвиг фаз δ отвечает за минимальную интенсивность в H -канале и максимальную в V -канале. Отсюда можно сделать вывод, что определять положение оси пластинки удобно по V -каналу, т.к. при любом сдвиге фаз δ можно добиться нулевой интенсивности изменением угла ϕ пластинки. Значение ϕ , при котором будет достигнут минимум интенсивности, можно считать за положение оси. В то же время, сдвиг фаз δ удобнее определять по H -каналу, т.к. его можно извлечь, сравнив минимальную и максимальную интенсивность при разных углах

ϕ .

Сначала производилось определение нулей по V -каналу для каждой пластинки, затем снимались зависимости интенсивности в H -канале от угла ϕ (Рис. 14). Аппроксимируя зависимости по формуле (63) для H -канала, считая параметрами δ и I_0 , получаем значения фаз, приведённые в Таблице 1.

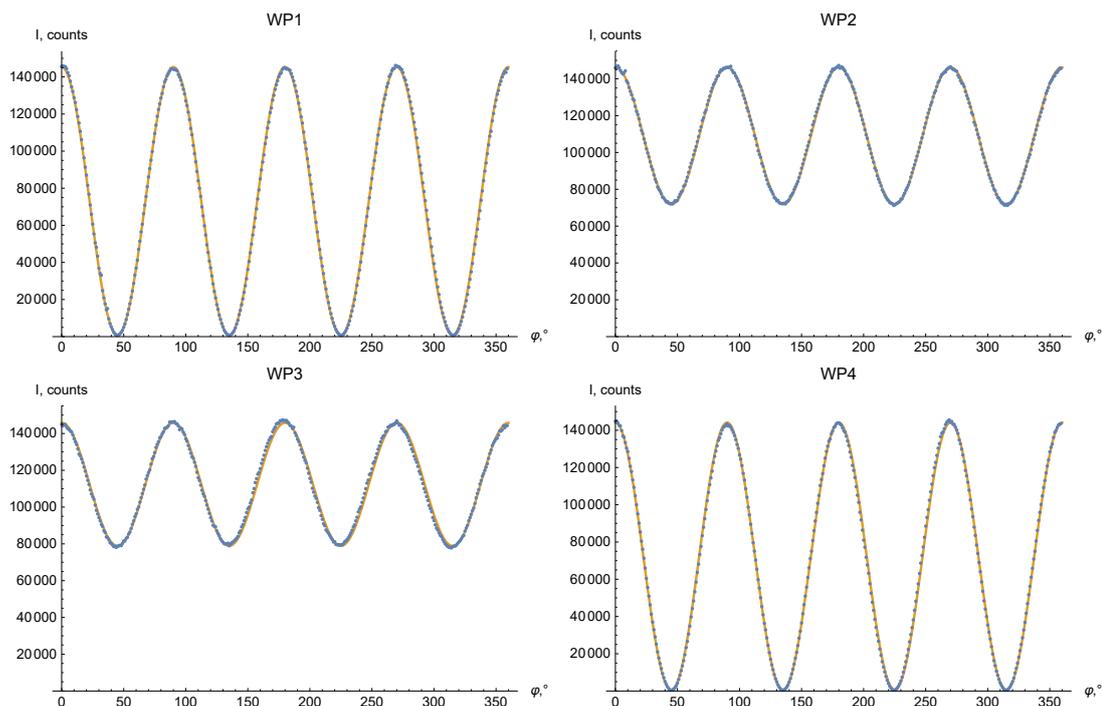


Рисунок 14: Интенсивность в H -канале для волновых пластинок в зависимости от угла ϕ между одной из осей пластинки и горизонталью. Точки — экспериментальные данные, сплошная линия — аппроксимация по формуле (63).

Такая процедура определения сдвигов фаз и положения осей не позволяет различить быструю и медленную ось пластинок. Для различения осей можно поставить 2 волновые пластинки между призмой Глана и призмой Волластона. Пластинка WP2 использовалась в качестве опорной, т.е. она всегда была второй пластинкой в паре. Сравним интенсивности в V -канале в двух положениях $\{\phi_1, \phi_2\}$ пластинок: $\{45^\circ, 45^\circ\}$ и

Таблица 1: Сдвиги фаз волновых пластинок.

WP #	δ	$\Delta\delta$
1	3.020	0.012
2	1.589	0.011
3	1.489	0.003
4	3.047	0.018

$\{135^\circ, 45^\circ\}$. При указанных значениях сдвигов фаз (Таблица 1) интенсивность в положении $\{45^\circ, 45^\circ\}$ должна быть выше для всех пар пластинок WP1,3,4 - WP2. Если же интенсивность в положении $\{135^\circ, 45^\circ\}$ больше для какой либо пары, это значит, что определённую фазу надо заменить на отрицательную - это эквивалентно замене быстрой оси на медленную.

5 Результаты

В работе рассматривались два способа выбора измерений для томографии: случайный (random) и адаптивный (adaptive). Случайный способ выбора измерений каждый раз выбирает измерения произвольным образом. Напротив, адаптивный способ выбора подбирает следующее измерение оптимальным образом, опираясь на полученные к моменту выбора данные, используя критерий (58). На легендах графиков способов выбора измерений указывается после запятой (“Случайный” или “Адаптивный”).

Точность томографии можно оценить по расстоянию между результатом томографии $\hat{\chi}$ и истинным состоянием χ_0 в какой-либо метрике. Для этого в работе используется обобщённая метрика Бюреса (22), а точнее её квадрат d_B^2 . Результатом томографии является среднее по распределе-

нию (44), что с учётом аппроксимации распределения (46) описывается формулой:

$$\hat{\chi} = \sum_{s=1}^S w_s \chi_s. \quad (64)$$

Таким образом, по величине $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)$ можно судить об успешности томографии. Данную величину будем называть “расстояние до истинного процесса”.

В эксперименте томографируемое состояние заранее не известно, поэтому нельзя вычислить расстояние до истинного процесса. Однако, судить о сходимости томографии можно по размеру распределения в обобщённой метрике Бюреса (45) \hat{d}_B^2 .

$$\hat{d}_B^2 = \sum_{s=1}^S w_s d_B^2(\chi_s, \hat{\chi}). \quad (65)$$

Данную величину будем называть “размер распределения”.

Можно установить связь между размером распределения и расстоянием до истинного состояния на основе численных симуляций. На Рис. 15 приведены графики зависимости отношения расстояния до истинного состояния к размеру распределения

$$R_{dd} = \frac{d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)}{\hat{d}_B^2}, \quad (66)$$

от числа зарегистрированных событий N для различных процессов (“Единичный” — не меняющий поляризацию процесс, поляризатор, частично деполяризующий канал), протоколов и параметров томографии (если количество точек в распределении не указано, то используется 1000 точек). Из графиков можно сделать вывод, что отношение R_{dd} почти всегда является константой в течении томографии, хотя эта константа и различается для разных процессов. Рост отношения R_{dd} при больших N связан с недостаточным количеством точек в аппроксимирующем распределении,

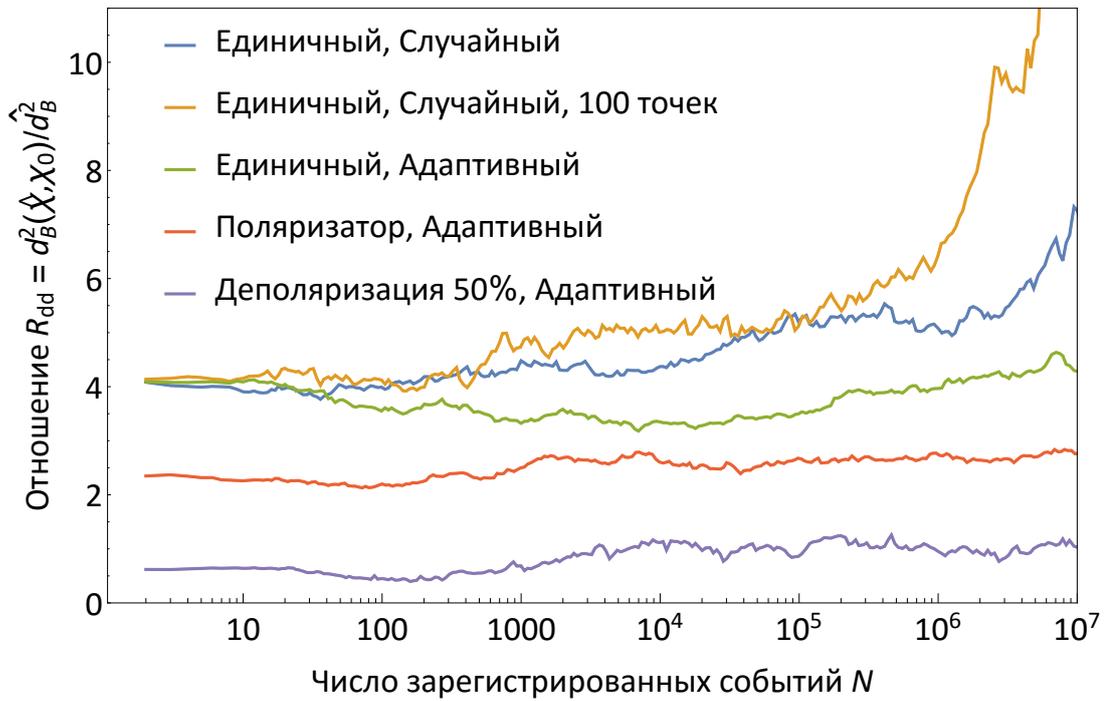


Рисунок 15: Графики зависимости отношения расстояния до истинного состояния к размеру распределения R_{dd} от числа зарегистрированных событий N для различных процессов (“Единичный” — не меняющий поляризацию процесс, поляризатор, частично деполяризирующий канал), протоколов и параметров томографии. Если количество точек в распределении не указано, то используется 1000 точек. “Случайный”, “Адаптивный” обозначают способ выбора измерений.

эту проблему можно решить, увеличив число точек, что видно из сравнения кривых для “Единичный, Случайный” и “Единичный, Случайный, 100 точек” на Рис. 15. Работа в эксперименте производится до $N = 10^6$. В этом интервале R_{dd} можно считать константой, а значит, по размеру распределения можно судить о расстоянии до истинного процесса, т.к. они связаны константой.

5.1 Эксперимент

В качестве проверки работы экспериментальной реализации алгоритма была произведена томография некоторых базовых элементов оптической установки. Среди таких элементов были рассмотрены: поляризатор, волновая пластинка, пара диэлектрических и металлических зеркал. Также была произведена томография при отсутствии какого-либо элемента в качестве неизвестного процесса. Такое преобразование, не меняющее поляризации каким-либо образом, будем называть "единичный процесс".

Далее представлены основные экспериментальных результаты. Для всех процессов осуществлялось 10 проходов томографии для каждого протокола, и производилось усреднение.

5.1.1 Единичный процесс

χ -матрица для единичного процесса должна выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Восстановленная по результатам томографии χ -матрица показана на Рис. 16. Данный результат довольно близок к теоретическому истинному $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_{Th}) \approx 0.009$. На Рис. 17 представлена зависимость размера распределения \hat{d}_B^2 от числа зарегистрированных событий N . Экспериментальная установка имеет ограничение по точности томографии, связанное, например, с точностью установки углов фазовых пластинок, призм Глана и Волластона и т. д. Поэтому в какой-то момент последующие измерения перестают уточнять информацию о неизвестном процессе. Этот

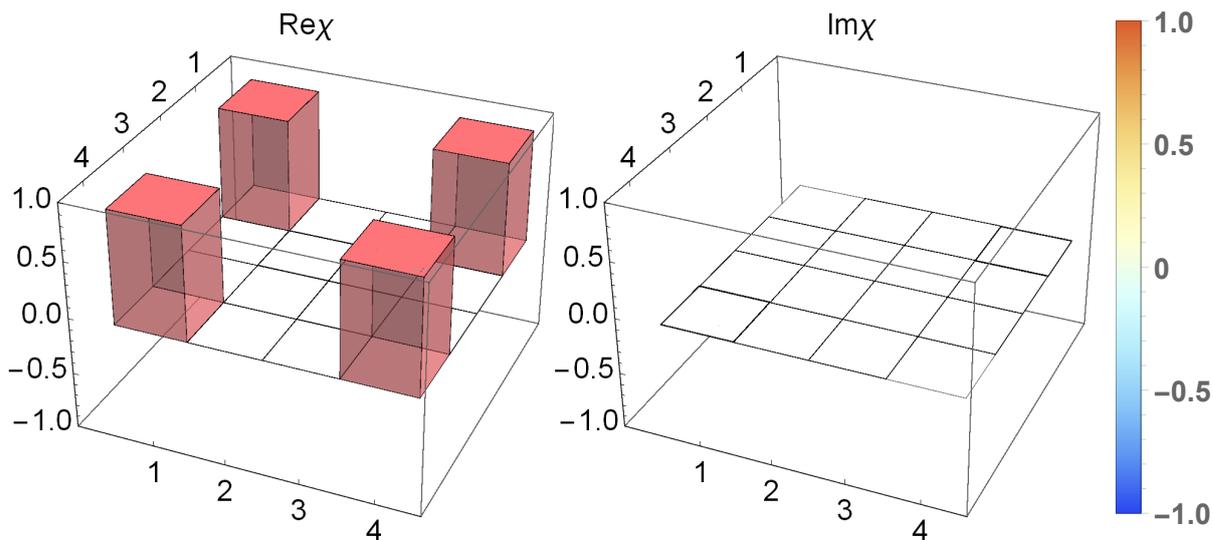


Рисунок 16: Результат томографии единичного процесса — действительная и мнимая часть восстановленной χ -матрицы.

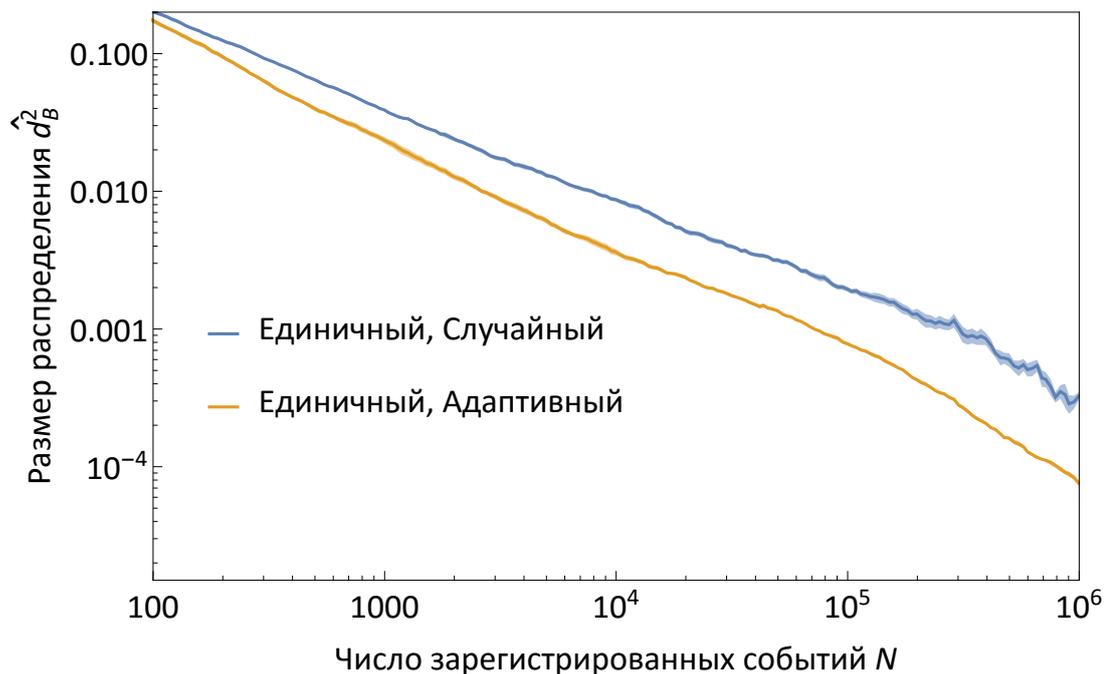


Рисунок 17: Зависимость размера распределения \hat{d}_B^2 от числа зарегистрированных событий N для единичного процесса. Значения усреднены по 10 проходам, заливкой показана погрешность. “Случайный”, “Адаптивный” обозначают способ выбора измерений.

момент в эксперименте можно определить следующим образом: проведём несколько попыток томографии одного и того же неизвестного процесса, вычислим средний процесс на каждом шаге путём усреднения результатов разных попыток:

$$\bar{\chi}(N) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{\chi}_k(N). \quad (68)$$

Далее рассмотрим среднее расстояние до среднего процесса в зависимости от числа зарегистрированных событий N :

$$d_{Spr}^2(N) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d_B^2(\hat{\chi}_k(N), \bar{\chi}(N)). \quad (69)$$

Величину d_{Spr}^2 назовём “разброс результатов”. Эта величина в эксперименте должна уменьшаться с ростом N , а затем выходить на пологий участок, т.к. томография перестаёт уточнять неизвестное состояние.

На Рис. 18 показана зависимость данной величины от числа зарегистрированных событий N для экспериментальных данных для единичного процесса. Этот график стоит сравнить с графиком зависимости расстояния до теоретического истинного (67) на Рис. 19. Удобнее всего произвести это сравнение именно для единичного процесса, поскольку истинный процесс для единичного процесса известен наиболее точно (для поляризатора истинный процесс зависит, например, от угла установки оси поляризатора). На данном графике виден постепенный выход на пологий участок в диапазоне $N \in [10^4, 10^5]$, что свидетельствует, по нашему мнению, о достижении экспериментальной точности установки для томографии. Также в этом диапазоне наблюдается загиб графика размера распределения вверх (Рис. 17). Хочется отметить, что пологий участок для адаптивного протокола лежит ниже чем для случайного протокола, что свидетельствует о преимуществе адаптивной томографии. На Рис. 18 тоже наблюдается выход на пологий участок, однако

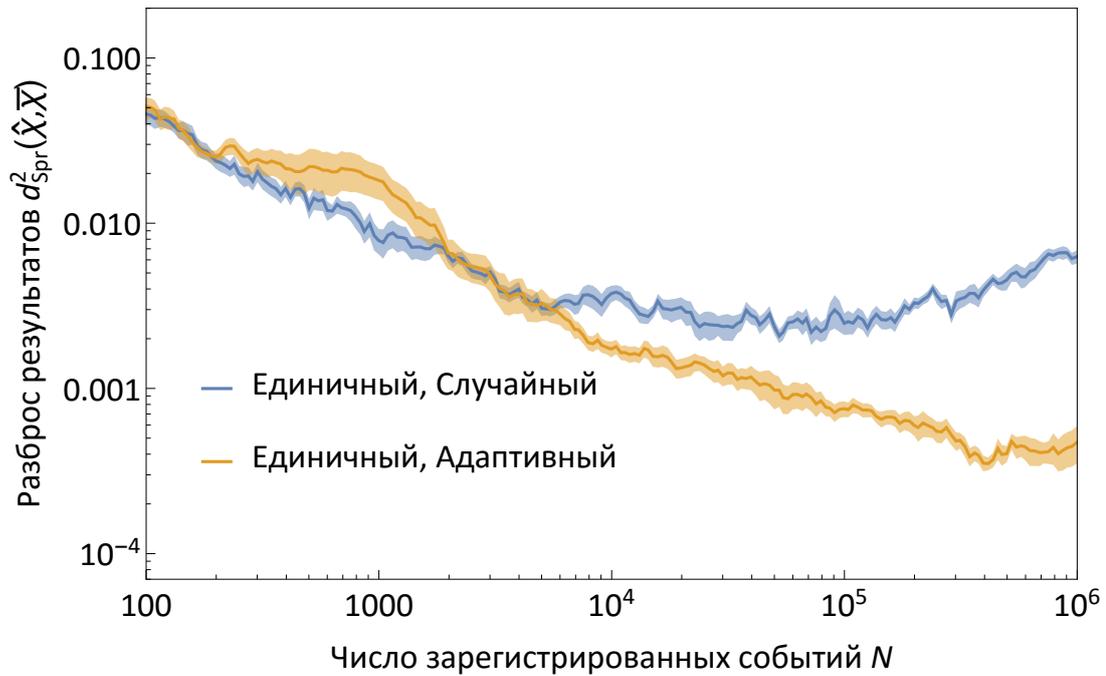


Рисунок 18: Зависимость разброса результатов d_{Spr}^2 от числа зарегистрированных событий N для единичного процесса. Значения усреднены по 10 проходам, заливкой показана погрешность. “Случайный”, “Адаптивный” обозначают способ выбора измерений.

значение d_B^2 этого пологого участка на порядок меньше чем на Рис. 19. Можно попытаться объяснить это следующим образом. Разобьём экспериментальные ошибки в установке на два типа. К ошибкам первого рода отнесём постоянные, не изменяющиеся от прохода к проходу, от измерения к измерению (это может быть, например неточность скрещивания призмы Глана, задающей входную поляризацию и призмы Волластона, обеспечивающей проективные измерения). Ошибки второго рода разные для каждого измерения. Это могут быть флуктуации засветки детекторов, неточность установки угла моторами волновых пластинок или калибровки сдвигов пластинок. Тогда можно считать, что разброс результатов (Рис. 18) выходит на константу, обусловленную ошибками второго рода. Ошибки первого рода остаются одинаковыми для разных проходов томографии и обеспечивают лишь постоянное смещение результата

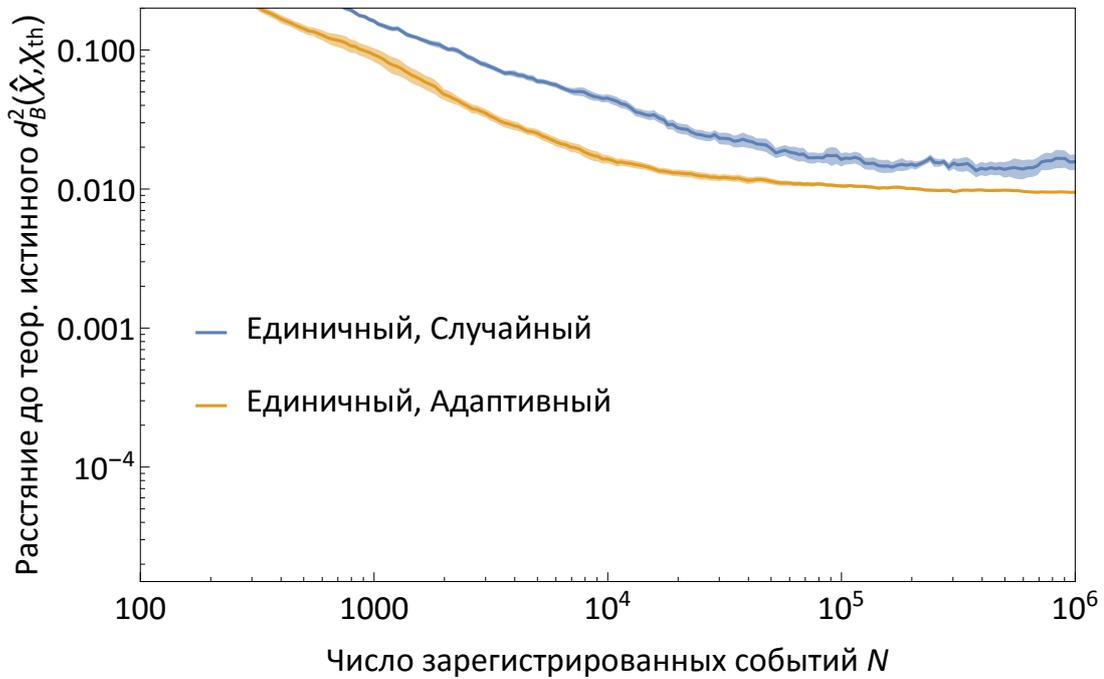


Рисунок 19: Зависимость расстояния до теоретического истинного $d_B^2(\hat{X}, X_{Th})$ от числа зарегистрированных событий N для единичного процесса. Значения усреднены по 10 проходам, заливкой показана погрешность. “Случайный”, “Адаптивный” обозначают способ выбора измерений.

томографии от истинного процесса. В то же время, поведение графика на Рис. 19 обусловлено обоими типами ошибок. Этот график может служить для калибровки установки: требуется минимизировать ошибки первого рода до такой степени, чтобы значения d_B^2 для пологого участка на Рис. 19 совпадало со значением на Рис. 18 (планируется осуществить это в дальнейшем). Тогда можно считать, что в установке остались лишь ошибки второго рода (связанные, например, с точностью моторов), которые обуславливают предельную точность томографии. В противном случае точность обусловлена ошибками обоих типов, и по графику разброса результатов нельзя правильно судить о предельной точности томографии. Требуется график расстояния до теоретического истинного, который нельзя построить для процесса, отличного от единичного.

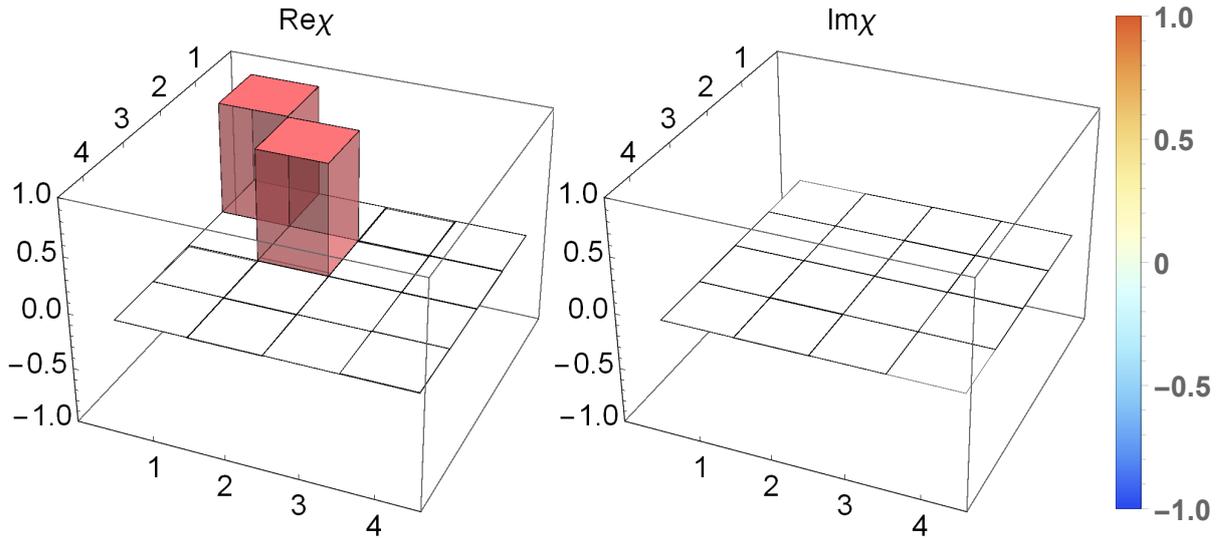


Рисунок 20: Результат томографии поляризатора, установленного на пропускание $|H\rangle$ поляризации — действительная и мнимая часть восстановленной χ -матрицы.

5.1.2 Поляризатор

Поляризатор был рассмотрен как пример неунитарного процесса, который можно восстановить, используя представление операторной суммой (6). В эксперименте поляризатор был установлен на пропускание $|H\rangle$ поляризации. Хотя поляризатор является несохраняющим след процессом, его можно рассмотреть как сохраняющий след, если включить в выборку (пост-селектировать) только события, при которых фотон прошёл через поляризатор. Тогда χ -матрица поляризатора, установленного на пропускание $|H\rangle$ поляризации, должна выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (70)$$

Результат томографии представлен на Рис. 20. Экспериментальные

данные находятся в неплохом согласии с теоретическим истинным процессом:

$d_B^2(\hat{\chi}, \chi_{Th}) \approx 0.008$. На Рис. 21 показана зависимость размера распределения \hat{d}_B^2 от числа зарегистрированных событий N .

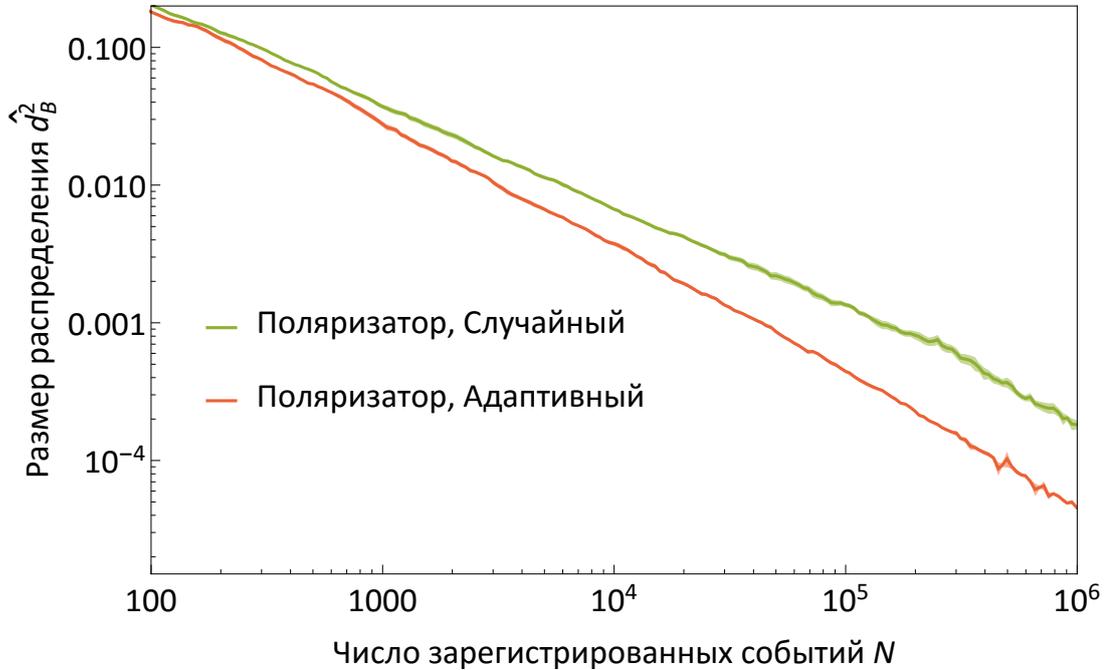


Рисунок 21: Зависимость размера распределения \hat{d}_B^2 от числа зарегистрированных событий N для поляризатора. Поляризатор установлен на пропускание $|H\rangle$ поляризации. Значения усреднены по 10 проходам, заливкой показана погрешность. “Случайный”, “Адаптивный” обозначают способ выбора измерений.

5.1.3 Волновая пластинка

Волновая пластинка рассматривалась для решения задачи восстановления сдвига фаз и угла установки пластинки по результатам томографии. Данная задача важна, поскольку от волновода в интегрально-оптическом чипе ожидалось похожее поведение из-за эффективного двулучепреломления.

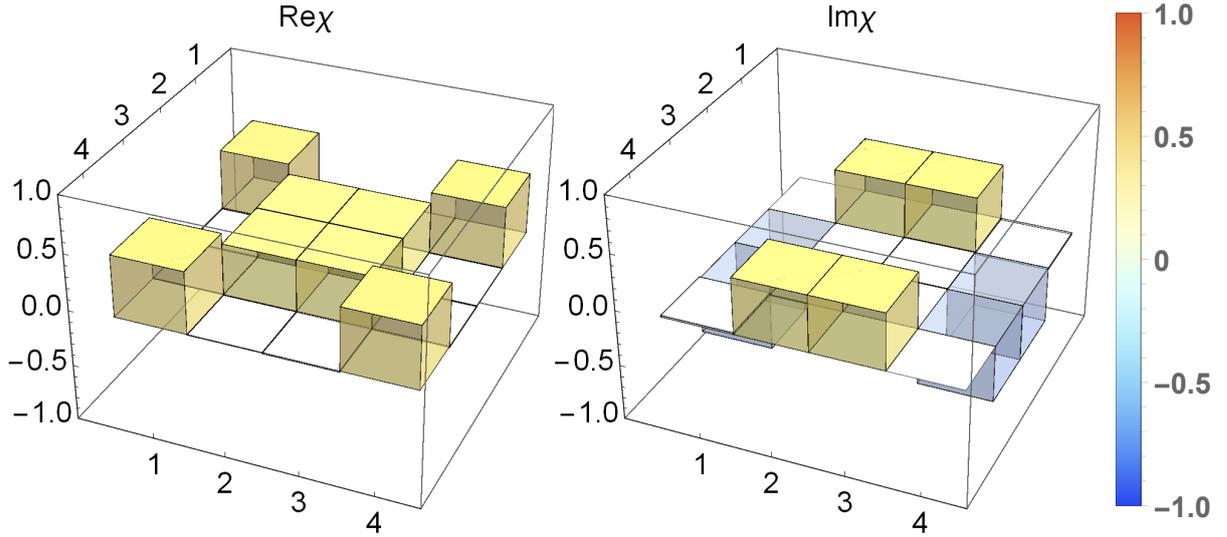


Рисунок 22: Результат томографии волновой пластинки — действительная и мнимая часть восстановленной χ -матрицы. Пластинка является примерно полуволновой и установлена в положение, при котором угол оси пластинки составляет с горизонталью примерно 45° .

Восстановим оператор Крауса, соответствующий матрице Джонса волновой пластинки, из результата томографии (Рис. 22) по формуле (14):

$$E = \begin{pmatrix} 0.737 + 0.021i & -0.006 + 0.671i \\ -0.014 + 0.672i & 0.737 \end{pmatrix} \quad (71)$$

$$\Delta E = \begin{pmatrix} 0.007 & 0.005 \\ 0.008 & 0.003 \end{pmatrix} (1 + i). \quad (72)$$

Вообще говоря, восстановленный оператор является неунитарным, что обусловлено погрешностью восстановления за счёт томографии. Погрешность оценена путём усреднения по разным попыткам томографии.

Приравняем матрицу Джонса J для волновой пластинки (62) с неизвестными углом установки ϕ и сдвигом фаз δ к восстановленной матрице E . Получим систему из четырёх уравнений на ϕ и δ . Система является несовместной, поэтому разделим её на 2 пары уравнений и решим их по отдельности. Мнимую часть ответов отбросим. Погрешность ре-

зультата оценим путём решения системы для матрицы с погрешностью $E + \Delta E$. Получим значения $\{\phi_1, \delta_1\}$ для равенства первых строчек матриц и $\{\phi_2, \delta_2\}$ для вторых строчек:

$$\phi_1 = -46.1 \quad \delta_1 = -1.473, \quad (73)$$

$$\phi_2 = -44.5 \quad \delta_2 = -1.473, \quad (74)$$

$$\Delta\phi = 0.5 \quad \Delta\delta = 0.021. \quad (75)$$

Значения лежат в пределах трёх погрешностей, что можно считать допустимым. Таким образом, ответом можно считать:

$$\phi = -45.3 \pm 0.5 \quad \delta = 1.473 \pm 0.021. \quad (76)$$

5.1.4 Зеркала

Установка (Рис. 12) реализована таким образом, что после чипа лазерный пучок отражается от двух зеркал. Это необходимо для увеличения расстояния, которое проходит пучок, чтобы излучение, не прошедшее через волновод, претерпело достаточную угловую расходимость и было отсечено диафрагмами. Поэтому чип и зеркала выступают единым процессом, протомографировать чип отдельно не представляется простой задачей. Можно произвести томографию зеркал отдельно от чипа, предварительно убрав чип и объективы. Если преобразование зеркал близко к единичному, то можно считать, что чип томографируется отдельно от зеркал. Иначе требуется рассматривать композицию двух процессов и определять χ -матрицу чипа по данным томографии системы чип+зеркала и зеркал отдельно.

Поначалу в установке использовались диэлектрические зеркала Thorlabs BV1-E03. При сравнении результата их томографии с единичным процессом (67) было получено значение расстояния $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_{air}) \approx$

0.05. Было решено заменить зеркала на золотые Thorlabs PF10-03-M01. Для них значение расстояния улучшилось $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_{air}) \approx 0.02$. Будем считать, что преобразование данных зеркал мало отличается от единичного процесса и не будем его учитывать при томографии чипа.

5.1.5 Волновод в интегрально-оптическом чипе

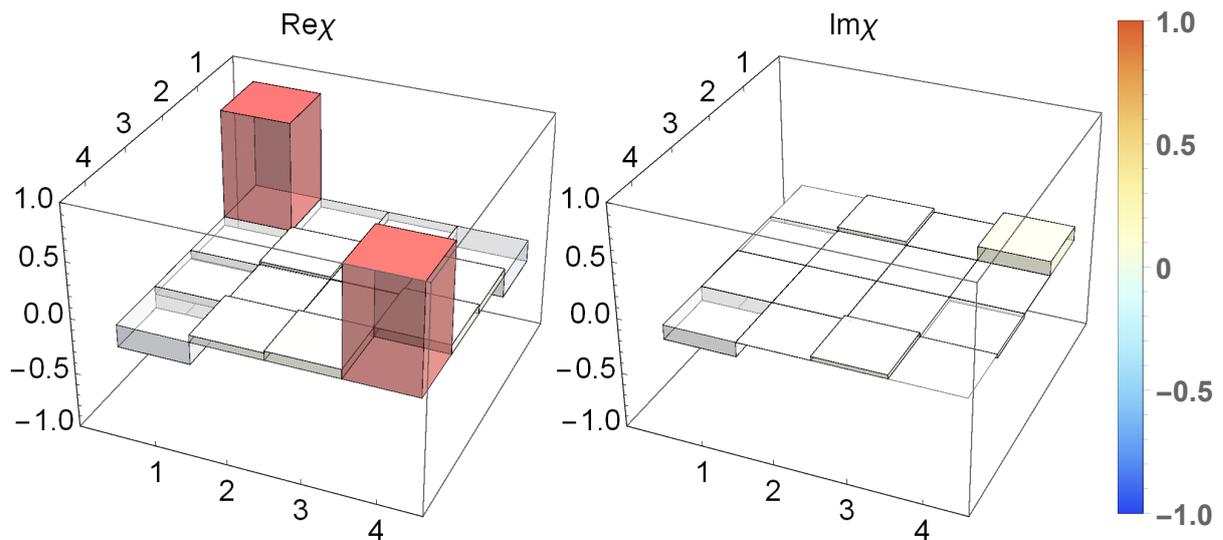


Рисунок 23: Результат томографии волновода в интегрально-оптическом чипе — действительная и мнимая часть восстановленной χ -матрицы.

Финальным этапом работы является томография волновода в интегрально-оптическом чипе. Как упоминалось ранее, томографировалась система чип+зеркала, при этом считалось, что зеркала мало меняют поляризацию. Ожидалось поведение, подобное поведению волновой пластинки, которое обусловлено эффективным двулучепреломлением из-за анизотропии показателя преломления в волноводе, наведённого при печати [32]. Полученная χ -матрица представлена на Рис. 23. χ -матрица, вопреки ожиданиям, не похожа на матрицу какой-либо волновой пластинки и далека от унитарного преобразования. Можно сказать, что примерно

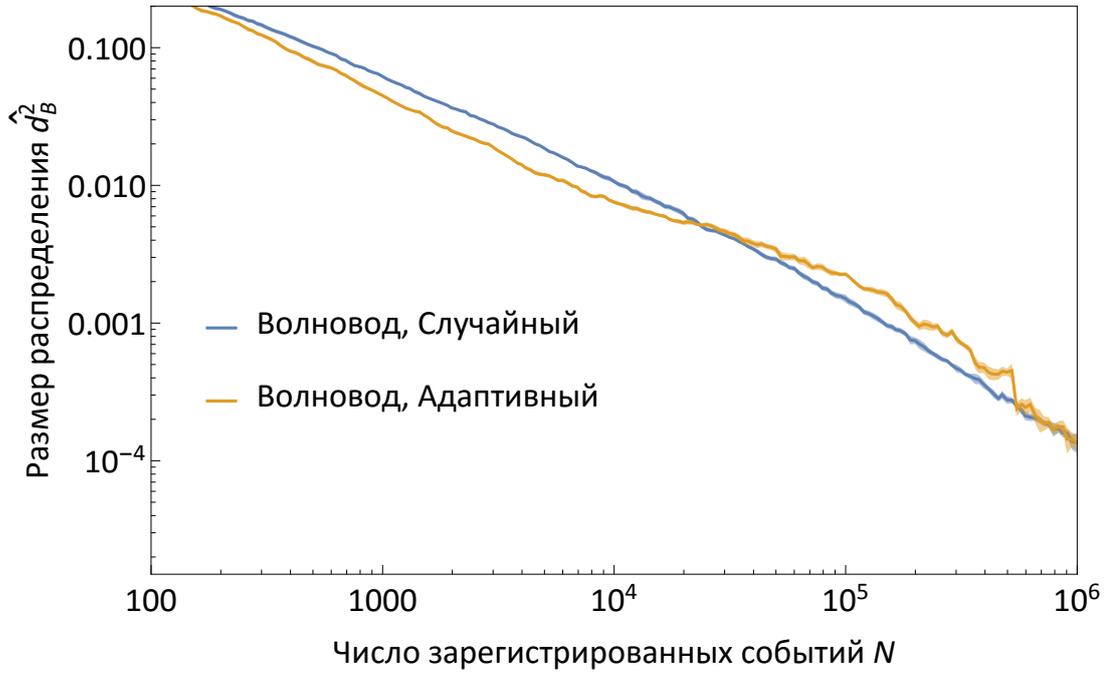


Рисунок 24: Зависимость размера распределения \hat{d}_B^2 от числа зарегистрированных событий N для волновода в интегрально-оптическом чипе. Значения усреднены по 10 проходам, заливкой показана погрешность. “Случайный”, “Адаптивный” обозначают способ выбора измерений.

на 80% матрица состоит из χ -матрицы канала переворота фазы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 - 2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - 2p & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (77)$$

где p отвечает за вероятность переворота фазы. Остальные 20% приходятся на матрицу волновой пластинки. Причины таких результатов пока не ясны. Проводилась томография нескольких разных волноводов, и результаты для них схожи. Возможным объяснением может быть пространственная неоднородность волновода, дисперсия сдвига фаз из-за немонохроматического спектра (ширина спектра используемого диодного лазера около 1 нм). В дальнейшем планируется исследовать эту проблему.

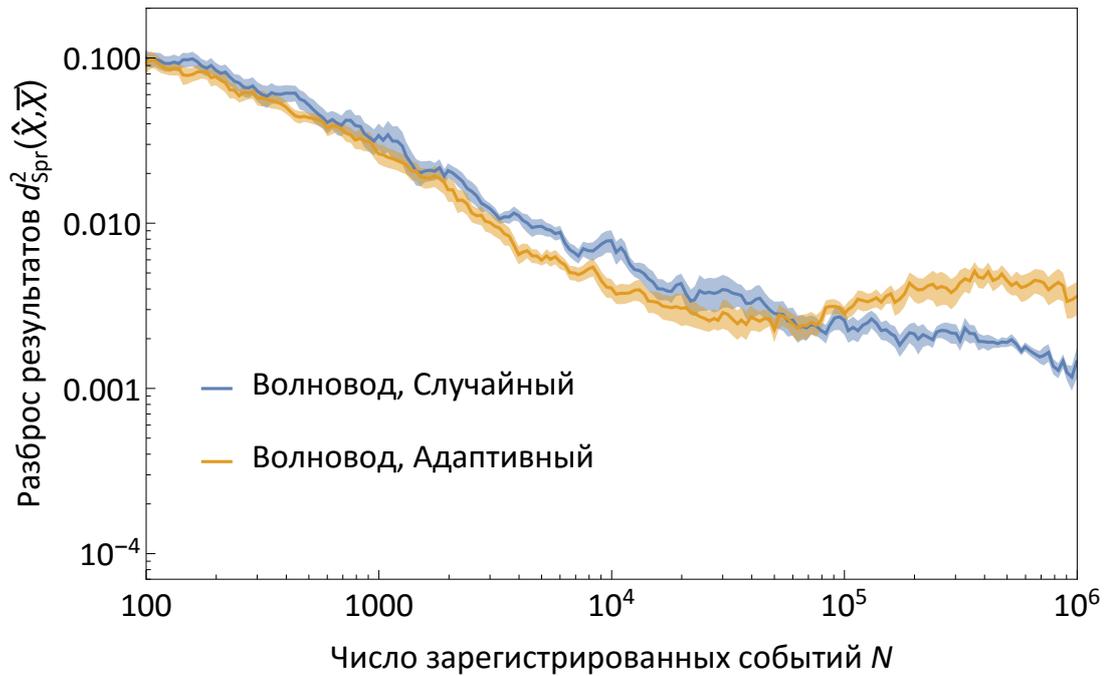


Рисунок 25: Зависимость разброса результатов d_{Spr}^2 от числа зарегистрированных событий N для волновода в интегрально-оптическом чипе. Значения усреднены по 10 проходам, заливкой показана погрешность. “Случайный”, “Адаптивный” обозначают способ выбора измерений.

Так же стоит отметить поведение адаптивных протоколов во время томографии чипа. График размера распределения \hat{d}_B^2 в зависимости от числа зарегистрированных событий N представлен на Рис. 24. Загиб графика на значениях $N \approx 10^4$ можно объяснить поведением разброса результатов d_{Spr}^2 (Рис. 25), поскольку при этих же значениях N томография достигает предела точности. Однако не ясно, почему значение точности для адаптивного протокола лежит выше протокола со случайным выбором измерений, что совсем не характерно для полученных ранее данных. Возможно это обусловлено наличием полного ранга у χ -матрицы истинного процесса, происходящего в волноводе (подробнее будет рассмотрено в результатах численных симуляций). Мы считаем данное поведение аномальным и требующим дальнейшего изучения.

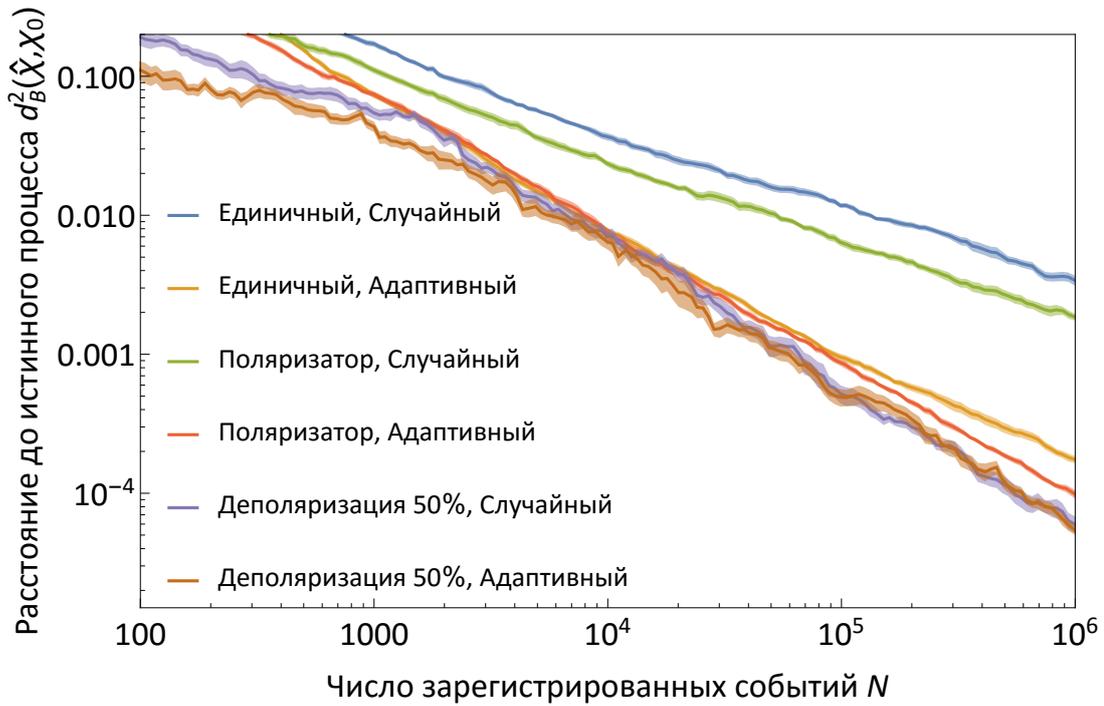


Рисунок 26: Зависимость расстояния до истинного процесса $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)$ в зависимости от числа зарегистрированных событий N для различных процессов. Наиболее ярко преимущество адаптивности выражено для состояний с неполным рангом χ -матрицы. “Случайный”, “Адаптивный” обозначают способ выбора измерений.

5.2 Симуляции

Из результатов численных симуляций хочется отметить различное преимущество адаптивности для разных процессов. На Рис. 26 приведена зависимость расстояния для истинного процесса $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)$ в зависимости от числа зарегистрированных событий N для различных процессов. Для процессов “Единичный” и “Поляризатор” выигрыш адаптивности существенный, что видно из графика. Оба этих процесса имеют неполный ранг χ -матрицы (1 и 2 соответственно). Канал с деполяризацией, напротив, имеет полный ранг χ -матрицы, что обуславливает отсутствие преимущества адаптивного протокола при томографии этого процесса. Планируется проверить это экспериментально. Под каналом деполяри-

зации 50% понимается процесс со следующей χ -матрицей:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Первая матрица описывает единичный процесс, вторая — полностью деполяризующий канал. В Таблице 2 приведены значения параметра аппроксимации α по формуле $CN^{-\alpha}$ для расстояния до истинного процесса $d_B^2(\hat{\chi}, \chi_0)$ в зависимости от числа зарегистрированных событий N для различных процессов.

Таблица 2: Значения параметра аппроксимации α по формуле $CN^{-\alpha}$ для сходимости различных процессов.

Процесс	α	$\Delta\alpha$
Единичный, Случайный	0.544	0.005
Единичный, Адаптивный	0.891	0.006
Поляризатор, Случайный	0.585	0.006
Поляризатор, Адаптивный	0.970	0.005
Деполяризация 50%, Случайный	1.034	0.009
Деполяризация 50%, Адаптивный	0.97	0.01

Зависимость сходимости томографии квантовых состояний от положения состояния в симплексе собственных значений ранее рассматривалась в нашей группе и представлена в работе [33]. Ситуация для процессов является сходной, что связано с изоморфизмом Чои-Жамиолковского между матрицами плотности состояний и χ -матрицами процессов.

Заключение

В работе было произведено сравнение двух алгоритмов случайного блуждания для целей повторной выборки из распределения в задаче томографии. Программная реализация для томографии квантовых состояний была расширена для работы с квантовыми процессами в системах произвольной размерности. Собрана экспериментальная установка для томографии однокубитных поляризационных процессов, в том числе для томографии поляризационных процессов в волноводе на основе интегрально-оптического чипа. Используя созданную программу для томографии, на экспериментальной установке была произведена томография ряда элементарных процессов и волновода в интегрально-оптическом чипе. Также произведено восстановление параметров преобразования по χ -матрице преобразования на примере волновой пластинки. Установлены основные закономерности томографии квантовых процессов путём численных симуляций.

На основе полученных экспериментальных результатов и результатов численных симуляций можно сделать следующие выводы:

- Адаптивные протоколы томографии имеют преимущество в сходимости перед протоколами со случайным выбором измерений. Преимущество наиболее выражено для состояний, имеющих χ -матрицу с неполным рангом, что является наиболее распространённым экспериментальным случаем.
- Точность экспериментальной томографии ограничивается точностью юстировки и калибровки установки, о чём можно судить по разбросу результатов томографии. Текущая точность установки $d_B^2 \approx 0.01$. Уровень точности для адаптивных протоколов выше чем для протоколов со случайным выбором измерений.

- Предложенный метод позволяет томографировать неунитарные преобразования, что подтверждено экспериментально. Планируется расширить метод на случай несохраняющих след процессов.
- Рассмотрение алгоритмов случайного блуждания для задач томографии показало преимущество алгоритма Метрополиса-Гастингса перед алгоритмом Лиу-Веста по точности и времени работы.

30.05.2016

Погорелов И.А.

Список литературы

- [1] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge University Press, 2010.
- [2] Man-Duen Choi. Completely positive linear maps on complex matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 10(3), 1975.
- [3] A. Jamiołkowski. Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators. *Reports on Mathematical Physics*, 3(4), 1972.
- [4] Min Jiang, Shunlong Luo, and Shuangshuang Fu. Channel-state duality. *Physical Review A*, 87(2), 2013.
- [5] Alexei Gilchrist, Nathan K. Langford, and Michael A. Nielsen. Distance measures to compare real and ideal quantum processes. *Physical Review A*, 71(6), 2005.
- [6] Karol Zyczkowski and Ingemar Bengtsson. *Geometry of Quantum States*. Cambridge University Press, 2008.
- [7] Isaac L. Chuang and M. A. Nielsen. Prescription for experimental determination of the dynamics of a quantum black box. *Journal of Modern Optics*, 44(11-12), 1996.
- [8] Andrew M. Childs, Isaac L. Chuang, and Debbie W. Leung. Realization of quantum process tomography in NMR. *Physical Review A*, 64(1), 2001.
- [9] Francesco De Martini, Andrea Mazzei, Marco Ricci, and Giacomo Mauro D'Ariano. Exploiting quantum parallelism of entanglement for a

- complete experimental quantum characterization of a single-qubit device. *Physical Review A*, 67(6), 2003.
- [10] Andrea Mazzei, Marco Ricci, Francesco De Martini, and G.M. D'Ariano. Pauli tomography: complete characterization of a single qubit device. *Fortschritte der Physik*, 51(45), 2003.
- [11] G. M. D'Ariano and P. Lo Presti. Quantum Tomography for Measuring Experimentally the Matrix Elements of an Arbitrary Quantum Operation. *Physical Review Letters*, 86(19), 2001.
- [12] M. A. Nielsen. Quantum information theory. *Science (New York, N.Y.)*, 305(5686), 2000.
- [13] J. B. Altepeter, D. Branning, E. Jeffrey, T. C. Wei, P. G. Kwiat, R. T. Thew, J. L. O'Brien, M. A. Nielsen, and A. G. White. Ancilla-Assisted Quantum Process Tomography. *Physical Review Letters*, 90(19), 2003.
- [14] M Mohseni and D. A. Lidar. Direct Characterization of Quantum Dynamics. *Physical Review Letters*, 97(17), 2006.
- [15] M. Mohseni, A. T. Rezakhani, and D. A. Lidar. Quantum-process tomography: Resource analysis of different strategies. *Physical Review A*, 77(3), 2008.
- [16] M. Born and P. Jordan. "Zur Quantenmechanik"("On Quantum Mechanics"). *Z. Phys.*, 34, 1925.
- [17] Anthony Laing and Jeremy L. O'Brien. Super-stable tomography of any linear optical device. *arXiv:1208.2868*, 2012.
- [18] Saleh Rahimi-Keshari, Matthew Broome, Robert Fickler, Alessandro

- Fedrizzi, Timothy C Ralph, and Andrew G White. Direct characterization of linear-optical networks. *Optics Express*, 21(11), 2013.
- [19] Max Tillmann, Christian Schmidt, and Philip Walther. On unitary reconstruction of linear optical networks. *arXiv:1512.04769*, 2015.
- [20] Michael Reck, Anton Zeilinger, Herbert J. Bernstein, and Philip Bertani. Experimental realization of any discrete unitary operator. *Physical Review Letters*, 73(1), 1994.
- [21] R Blume-Kohout. Optimal, reliable estimation of quantum states. *New Journal of Physics*, 12(4), 2010.
- [22] F. Huszár and N. M. T. Houlby. Adaptive Bayesian quantum tomography. *Physical Review A*, 85(5), 2012.
- [23] J. L. O’Brien, G. J. Pryde, A. Gilchrist, D. F. V. James, N. K. Langford, T. C. Ralph, and A. G. White. Quantum Process Tomography of a Controlled-NOT Gate. *Physical Review Letters*, 93(8), 2004.
- [24] I. A. Fedorov, A.K. Fedorov, Y. V. Kurochkin, and A. I. Lvovsky. Tomography of a multimode quantum black box. *New Journal of Physics*, 17(4), 2015.
- [25] de Freitas JF, M Niranjana M, Gee, and Doucet. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Springer New York, 2001.
- [26] WK K Hastings. Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications. *Biometrika*, 57(1), 1970.
- [27] Jane Liu and Mike West. Combined Parameter and State Estimation in Simulation-Based Filtering. In *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Springer New York, 2001.

- [28] Christopher E Granade, Christopher Ferrie, Nathan Wiebe, and D G Cory. Robust online Hamiltonian learning. *New Journal of Physics*, 14(10), 2012.
- [29] Jean Ginibre. Statistical Ensembles of Complex, Quaternion, and Real Matrices. *Journal of Mathematical Physics*, 6(3), 1965.
- [30] Francesco Mezzadri. How to generate random matrices from the classical compact groups. *arXiv:math-ph/0609050*, 2006.
- [31] R. Clark Jones. A New Calculus for the Treatment of Optical Systems. *Journal of the Optical Society of America*, 31(7), 1941.
- [32] Luís a Fernandes, Jason R Grenier, Peter R Herman, J Stewart Aitchison, and Paulo V S Marques. Femtosecond laser writing of waveguide retarders in fused silica for polarization control in optical circuits. *Optics Express*, 19(19), 2011.
- [33] G. I. Struchalin, I. A. Pogorelov, S. S. Straupe, K. S. Kravtsov, I. V. Radchenko, and S. P. Kulik. Experimental adaptive quantum tomography of two-qubit states. *Physical Review A*, 93(1), 2016.