

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В.
ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ

**ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СОСТОЯНИЯ
ДВУХМОДОВЫХ БИФОТОНОВ:
ПРИГОТОВЛЕНИЕ, ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И
ПРИМЕНЕНИЕ В ПРОТОКОЛАХ
КВАНТОВОЙ ИНФОРМАЦИИ**

Допущена к защите
"___" декабря 2008 г.

Дипломная работа
студента 627 группы
Страупе С. С.

Зав. кафедрой квантовой
электроники,
д. ф.-м.н., профессор
В. И. Панов.

Научный руководитель
д.ф.-м.н, профессор
С.П.Кулик

Москва, 2008

Содержание

1	Введение	3
2	Методы приготовления оптических кудитов	4
2.1	Интерферометрические схемы (time-bin)	5
2.2	Схемы использующие орбитальный угловой момент фотонов	9
2.3	Схемы использующие корреляции в угловом спектре СПР .	11
2.4	Методы, основанные на использовании поляризационных состояний бифотонов	13
3	Применение кудитов в протоколах квантовой информации	18
3.1	Обобщения протокола BB84	18
3.2	Детерминистические протоколы	20
4	Схемы приготовления произвольных состояний поляризационных куквартов	22
5	Экспериментальная реализация детерминистического протокола КРК с использованием поляризационных куквартов	27
6	Экспериментальная реализация схемы приготовления произвольного состояния кукварта	33
7	Неабелева геометрическая фаза и ее проявления при поляризационных преобразованиях двухмодовых бифотонов	41
8	Заключение и выводы	50

1 Введение

Целью работы является разработка методов экспериментального приготовления произвольных состояний четырехуровневых квантовых систем (куквартов). Для экспериментальной реализации куквартов использовались поляризационные состояния двухмодовых бифотонов. Предложенные методы нашли приложение в реализации детерминистического протокола квантового распределения ключа.

Так называемые, многоуровневые квантовые системы (системы с размерностью гильбертова пространства состояний $D \geq 3$) вызывают все больший интерес, обусловленный во многом возможностью их применения в различных протоколах квантовой информации. Использование таких систем (часто называемых также *кудитами*) в качестве носителей информации, имеет ряд преимуществ перед кодированием с помощью кубитов. Второй важной областью применения кудитов является экспериментальная проверка оснований квантовой теории, в частности проверка неравенств Белла. При этом оказывается, что использование многоуровневых систем в ряде случаев позволяет увеличить количественный разрыв между квантовыми и классическими корреляциями, и соответственно снизить требования предъявляемые к детекторам и прочему экспериментальному оборудованию (*detection loophole*). В связи с этим, развитие методов приготовления и характеристики различных состояний кудитов (*quantum state engineering*) представляется актуальной задачей. Особый интерес представляют методы, позволяющие приготавливать кудиты в произвольном наперед заданном состоянии. Поляризационные состояния бифотонов оказываются очень удобным для решения поставленных задач объектом, поскольку

позволяют легко экспериментально реализовывать широкий класс унитарных преобразований. В данной работе предложены методы приготовления произвольных состояний поляризационных квантов, как чистых, так и смешанных. Увеличение размерности пространства поляризационных состояний также расширяет класс доступных преобразований поляризации. В работе рассмотрены параметризованные преобразования поляризационных состояний двухмодовых бифотонов и проявления в них эффектов, связанных с неабелевой геометрической фазой и предложена схема для их экспериментального наблюдения.

2 Методы приготовления оптических кудитов

В последнее время было предложено несколько различных способов реализации кудитов. В контексте нашей работы, наибольший интерес представляют исследования, в которых использовались различные степени свободы фотонов. Можно выделить два основных подхода к созданию многоуровневых оптических систем. Во-первых кудит, очевидно, можно реализовать как перепутанное состояние нескольких кубитов, например нескольких фотонов, перепутанных по поляризации. Во-вторых можно использовать степени свободы одного фотона, такие как орбитальный угловой момент, пространственные и частотные степени свободы. Не претендуя на полноту изложения, приведем краткий обзор предложенных методов.

2.1 Интерферометрические схемы (time-bin)

Первой экспериментальной реализацией кудитов с использованием интерферометрических схем (перепутывание по переменным энергия-время) была работа [1]. Схема использовавшейся экспериментальной установки приведена на рис. 1.

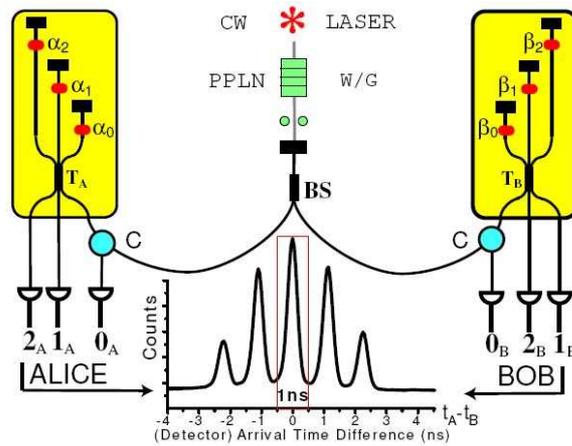


Рис. 1: Интерферометрическая схема приготовления перепутанных состояний двух кутритов.

Все элементы установки были реализованы в оптических волокнах. Пары фотонов рождались в процессе СПР в периодически поляризованном кристалле ниобата лития, накачиваемом непрерывным излучением диодного лазера на длине волны 657 нм. Фотоны разделялись на 50% волоконном светоделителе, каждый из выходов которого направлялся на вход трехплечевого интерферометра, состоящего из так называемого, триттера - симметричного трехмодового (с тремя входами и тремя выходами) светоделителя, с коэффициентами пропускания 0.33/0.33/0.33 и трех участков волокон различной длины - плеч интерферометра, оканчивающихся фарадеевскими зеркалами. Обозначим интерферометры в двух каналах как A и B . Интерферометры были разбалансированы, но длины соответствующих

плеч в каналах A и B были одинаковыми и подобраны таким образом, что выполнялись соотношения: $l_A - m_A \approx m_A - s_A \approx l_B - m_B \approx m_B - s_B \approx c\Delta\tau$, где $l(m, s)_A(B)$ - длины "длинного" "среднего" и "короткого" плеча в каналах A и B , соответственно. При выполнении этих условий, гистограмма времени прибытия одного фотона относительно времени прибытия первого имеет характерную структуру с пятью максимумами. Центральный максимум соответствует ситуации, в которой оба фотона прошли через плечи равной длины, остальные - временной задержке в $\pm\Delta\tau$ и $\pm 2\Delta\tau$, соответственно. Используемая разность длин плеч была подобрана таким образом, чтобы длина когерентности сигнала СПР была много меньше, а длина когерентности накачки, наоборот, много больше разности длин плеч. Первое условие обеспечивало отсутствие однофотонной интерференции, а второе - неразличимость возможных путей. Фарадеевские зеркала использовались для того, чтобы обеспечить ортогональность поляризационного состояния фотона на выходе интерферометра состоянию на входе, независимо от того по какому из плеч он прошел. Детектирование производилось с помощью трех счетных фотодетекторов в каждом из каналов. Рассматривались события, приводящие к совпадению фотоотсчетов каких-либо из пар детекторов, в пределах заданного временного окна (что, по сути, являлось так называемой, постселекцией). Если обозначить фазы для каждого из двух фотонов, набегающие в плечах интерферометров как α_j, β_j , то соответствующие со-

стояния будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
|\psi_{00}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[|00\rangle + e^{i(\alpha_1 - \alpha_0 + \beta_1 - \beta_0 + t)} |11\rangle + e^{i(\alpha_2 - \alpha_0 + \beta_2 - \beta_0 + t)} |22\rangle \right] \\
|\psi_{01}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[|00\rangle + e^{i(\alpha_1 - \alpha_0 + \beta_1 - \beta_0)} |11\rangle + e^{i(\alpha_2 - \alpha_0 + \beta_2 - \beta_0 - t)} |22\rangle \right] \\
|\psi_{02}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[|00\rangle + e^{i(\alpha_1 - \alpha_0 + \beta_1 - \beta_0 - t)} |11\rangle + e^{i(\alpha_2 - \alpha_0 + \beta_2 - \beta_0)} |22\rangle \right],
\end{aligned} \tag{1}$$

где, к примеру, $|\psi_{01}\rangle$ соответствует состоянию, приводящему к отсчетам в детекторах 0_A и 1_B , а состояние $|11\rangle$ - ситуации, при которой оба фотона прошли через "средние" плечи интерферометра, коэффициент $t = 2\pi/3$ связан со скачком фазы при отражении.

Рассмотренная схема может быть очевидным образом обобщена на состояния большей чем три размерности, однако это потребует использования многоплечевых интерферометров, что сопряжено со значительными технологическими трудностями. Также следует отметить, что схема существенно использует постселекцию, что тоже не является ее достоинством.

Интересная схема, позволяющая готовить состояния произвольной размерности была предложена в работе [2]. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 2.

В рассматриваемом эксперименте накачкой для СПР служила последовательность фемтосекундных импульсов от титан-сапфирового лазера, работавшего в режиме синхронизации мод, что обеспечивало фиксированные фазовые соотношения между различными импульсами. Пусть накачка состоит из последовательности d импульсов, тогда состояние, генерируемое в процессе СПР, имеет вид:

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^d c_j e^{i\varphi_j} |j_A, j_B\rangle, \tag{2}$$

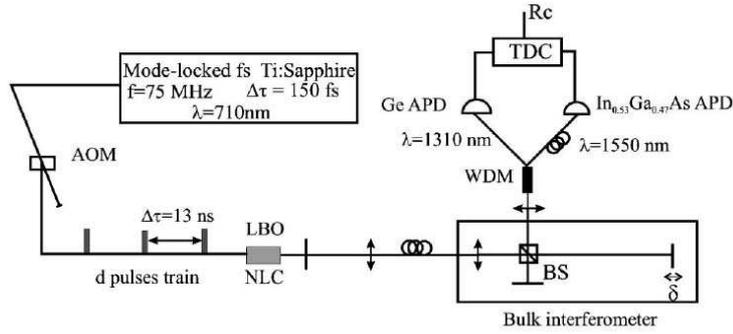


Рис. 2: Схема экспериментальной установки для приготовления кудитов с помощью последовательности импульсов накачки.

где $|j_A, j_B\rangle$ соответствует паре фотонов в модах A и B , рожденных j -м импульсом. Относительные фазы и амплитуды состояний могут изменяться с помощью введения в накачку фазовых и амплитудных модуляторов. Основным недостатком такой схемы является необходимость использования d -плечевого интерферометра для полной характеристики приготовленного состояния. В рассматриваемой работе, однако, использовался двухплечевой интерферометр, для которого было получено следующее выражение для зависимости видности двухфотонной интерференции от размерности состояний на входе: $V = V_{max}(d - 1)/d$, которое и проверялось экспериментально. Значение V_{max} ограничено сверху из-за возможности рождения более чем одной пары за импульс. Для него была получена оценка $V_{max} = (0.97 \pm 0.01)$. В работе [3] для анализа приготовленных аналогичным образом состояний использовался интерферометр Фабри-Перо.

2.2 Схемы использующие орбитальный угловой момент фотонов

Основной идеей методов, рассматриваемых ниже, является использование в качестве базисных состояний фотонов с отличным от нуля угловым моментом. Как известно, таким свойством обладают, так называемые, моды Гаусса-Лаггера. Структура некоторых интересующих нас мод показана на рис.3.

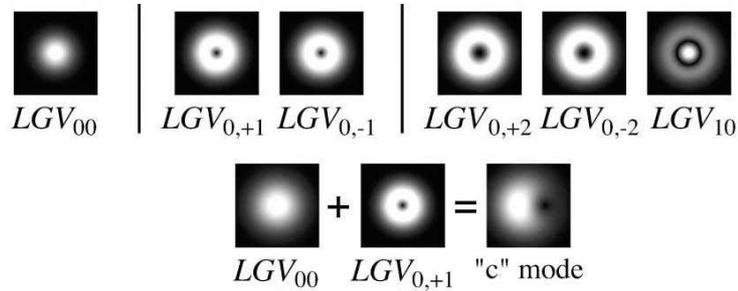


Рис. 3: Некоторые моды Гаусса-Лаггера.

Здесь LGV_{pl} означает, моду с p узлами в радиальном направлении и топологическим зарядом l (при обходе вокруг центра пучка фаза меняется на $2\pi l$). Индекс l определяет угловой момент фотона в единицах \hbar . Моды Гаусса-Лаггера образуют ортогональный базис, что делает их удобными для реализации многоуровневых систем.

В работе [4] была экспериментально продемонстрирована возможность приготовления перепутанных состояний кутритов с использованием орбитального углового момента. Использовались моды LG_{0l} со значениями $l = -2, -1, \dots, 2$. Для создания пучков с ненулевым орбитальным моментом применялись фазовые голограммы. Кроме того, было показано, что с помощью смещенной голограммы можно создавать суперпозицию Гауссо-

вой (LGV_{00}) моды и моды LGV_{0l} с хорошо определенными относительными амплитудой и фазой (пример такой суперпозиции приведен на рис. 3 под названием "c" mode). В измерительной части схемы использовались аналогичные голограммы, установленные перед одномодовыми волокнами, что позволяло проектировать состояние на соответствующую голограмме. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 4.

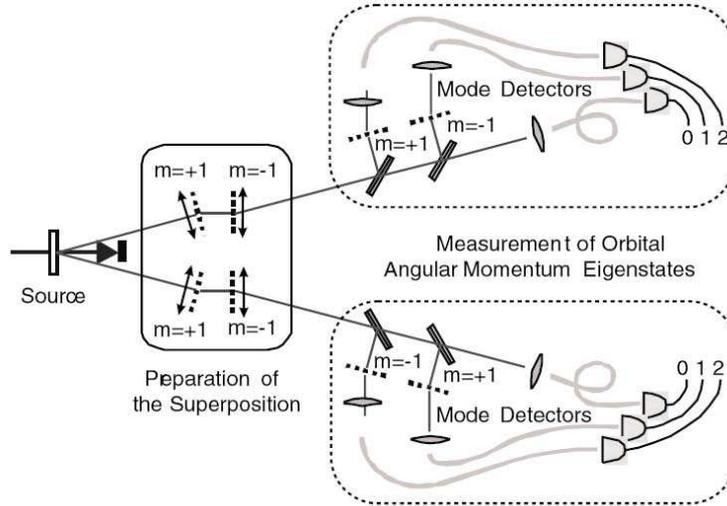


Рис. 4: Схема приготовления перепутанных состояний двух кутритов с использованием орбитального углового момента фотонов.

В каждую из двух пространственных мод неколлинеарного СПР помещались две голограммы, первая из которых преобразовывала входную моду в суперпозицию LGV_{00} и LGV_{01} , а вторая - LGV_{00} и LGV_{0-1} . Смещением этих голограмм по горизонтали и вертикали можно было контролировать относительные амплитуды и фазы каждой моды.

Рассмотренная методика допускает обобщения на случай произвольной размерности, теоретически рассмотренные, например, в работе [6].

2.3 Схемы использующие корреляции в угловом спектре СПР

Пары фотонов, рождающиеся в процессе СПР, коррелированы по поперечным компонентам волновых векторов в силу условий пространственного синхронизма (или, что то же самое, закона сохранения импульса). Корреляции такого рода могут быть использованы для приготовления перепутанных состояний кудитов.

Эта идея была реализована в работе [7]. Схема эксперимента приведена на рис. 5.

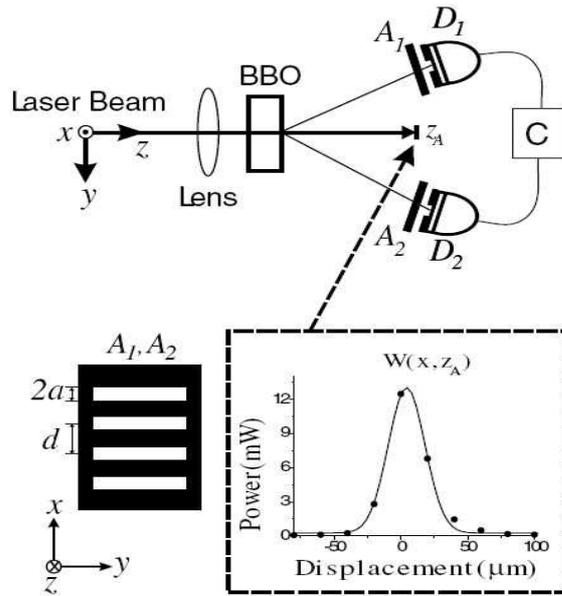


Рис. 5: Схема приготовления перепутанных состояний кудитов с использованием поперечных корреляций импульсов фотонов.

Коррелированные пары фотонов рождались в процессе неколлинеарного СПР типа-II. В каждый из пучков помещалась маска с D щелями, амплитудный коэффициент пропускания которой имел вид:

$$A(x) = \sum_{l=-l_D}^{l_D} \prod \left(\frac{x - ld}{2a} \right), \quad (3)$$

где $\prod(x)$ означает "прямоугольную" функцию, d - расстояние между щелями, а a - ширина щели. Накачка фокусировалась таким образом, чтобы размер пучка в плоскости масок был порядка ширины щелей. Вектор состояния бифотона, прошедшего через маски, в таком случае имеет вид:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{D} \sum_{l=-l_D}^{l_D} e^{ik(d^2 l^2 / 2z_A)} |l_1\rangle |-l_2\rangle, \quad (4)$$

где

$$|l_j\rangle = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int dq_j e^{-iq_j ld} \text{sinc}(q_j a) |1_{q_j}\rangle. \quad (5)$$

Физически, состояние $|l_j\rangle$ соответствует ситуации при которой фотон в моде j прошел через щель с номером l . Из вида вектора состояния (4) ясно, что если фотон в моде 1 проходит через щель l , то соответствующий фотон в моде 2 проходит через щель $-l$. Состояние (4), таким образом имеет вид максимально перепутанного состояния кудитов с $d = 2l_D$ (в эксперименте использовались маски с $D = 4$ и $D = 8$). Измерительная схема была устроена следующим образом: 2 детектора с малой апертурой были установлены после масок и объединены схемой совпадений. Положение одного из детекторов фиксировалось около щели с некоторым номером l , второй же детектор сканировался. При этом совпадения отсчетов детекторов наблюдались только при положении второго детектора, соответствующем щели с номером $-l$. Скорость счета совпадений при различных положениях детекторов определяет коэффициенты в разложении $|\psi\rangle$ по базису состояний $|l_1\rangle |-l_2\rangle$.

Аналогичная схема, но реализованная с помощью двумерной матрицы из оптических волокон, была продемонстрирована в работе [8].

Заметим, что существует принципиальное ограничение на размерность кудитов, которые можно приготовить в рассмотренных схемах. Оно определяется степенью перепутанности состояния бифотона, которую можно приближенно оценить как отношение ширины углового распределения единичных отсчетов к ширине углового распределения совпадений в схеме рис. 5 при отсутствии масок (см. например, [9]).

2.4 Методы, основанные на использовании поляризационных состояний бифотонов

Поляризационные степени свободы фотонов представляются особенно удобным объектом для экспериментального приготовления состояний кудитов. Основной причиной является простота осуществления поляризационных преобразований, для которых достаточно линейных оптических элементов типа фазовых пластинок. Это позволяет легко контролироватьготавливаемое состояние, что выгодно отличает данную группу методов от рассмотренных ранее. Кроме того, разработанные методы поляризационной томографии позволяют в результате относительно простой процедуры полностью восстанавливать вектор состояния приготовленной квантовой системы.

По видимому, первой работой, в которой была предложена схема, позволяющая готовить произвольное состояние поляризационного кудита, была работа [10]. В работе рассматриваются поляризационные состояния одномодовых бифотонов, генерируемых в процессе коллинеарного

вырожденного по частоте СПР. Вектор состояния такой системы имеет вид:

$$|\psi\rangle = c_1 |2_H, 0_V\rangle + c_2 |1_H, 1_V\rangle + c_3 |0_H, 2_V\rangle, \quad (6)$$

где H и V - ортогональные поляризационные моды (для определенности, соответствующие горизонтальной и вертикальной поляризациям). Состояния $|2_H, 0_V\rangle$ и $|0_H, 2_V\rangle$ соответствуют синхронизму типа-I, а состояние $|1_H, 1_V\rangle$ - синхронизму типа-II. Экспериментальная установка изображена на рис. 6.

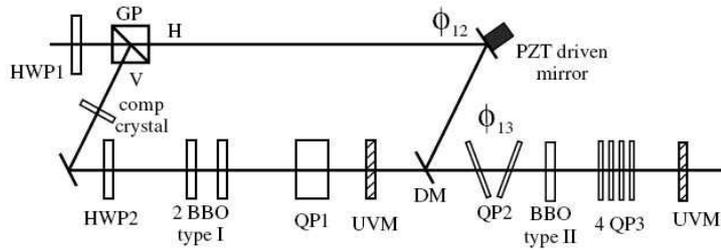


Рис. 6: Схема приготовления произвольного состояния поляризационного кутрита.

В качестве накачки использовалась вторая гармоника фемтосекундного лазера с шириной импульса порядка 100 фс на длине волны 800 нм. После полуволновой пластинки HWP1 линейно поляризованная накачка разделялась призмой глана, отражающей вертикально и пропускающей горизонтально поляризованный свет. В отраженном плече повернутая на 45° полуволновой пластинкой HWP2 накачка рождала пары фотонов в двух кристаллах ВВО типа-I с ортогонально ориентированными осями (состояния $|2_H, 0_V\rangle$ и $|0_H, 2_V\rangle$), после чего отражалась УФ зеркалом. Вторая поляризационная компонента накачки, после отражения от выходного дихроичного зеркала интерферометра Маха-Цандера, рождала пары фотонов в кристалле типа-II (состояние $|1_H, 1_V\rangle$). Относительные фазы φ_{12} и φ_{13} меж-

ду коэффициентами в (6) варировались с помощью пьезоподачи и пары кварцевых пластинок с изменяемым наклоном, соответственно. Для компенсации групповых задержек использовались кварцевые пластины QR1 и QR3. В измерительной части установки использовалась томографическая схема, предложенная в [11]. Мера соответствия состояний, полученных в результате эксперимента, ожидаемым (так называемая, *fidelity*) достигала значений более 0.98, что свидетельствует о высоком качестве приготовления состояний.

В качестве недостатка рассмотренного метода можно отметить использование импульсной накачки с вытекающими отсюда сложностями с обеспечением заданных фазовых соотношений и необходимостью компенсации групповых задержек.

Этих недостатков лишена схема предложенная в работе [12]. В работе показано, что произвольное состояние кутрита или кукварта может быть получено из немаксимально перепутанного состояния двух кубитов с помощью локальных унитарных преобразований. В терминах поляризационных состояний бифотонов произвольный кукварт имеет вид:

$$|\psi\rangle = c_1 |H_1 H_2\rangle + c_2 |H_1 V_2\rangle + c_3 |V_1 H_2\rangle + c_4 |V_1 V_2\rangle, \quad (7)$$

где индексы 1 и 2 соответствуют двум различным пространственным модам. Существуют такие локальные (т.е. производимые только в одной из пространственных мод) преобразования U и W , что:

$$|\psi\rangle = U \otimes W |\chi\rangle, \quad (8)$$

где $|\chi\rangle = x |H_1 H_2\rangle + \sqrt{1-x^2} |V_1 V_2\rangle$ - "затравочное" состояние. Схема пред-

ложенной установки приведена на рис. 7.

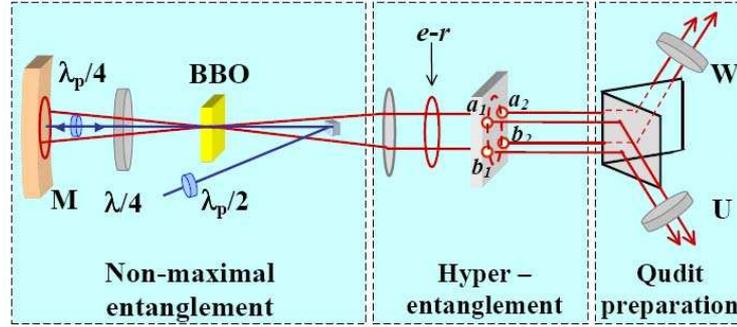


Рис. 7: Схема приготовления произвольного состояния поляризационного кутрита с помощью локальных преобразований.

"Затравочное" состояние получается в результате двойного прохождения нелинейного кристалла, вырезанного для синхронизма типа-I непрерывной накачкой, поляризация которой поворачивается перед вторым проходом фазовой пластинкой. Изменение угла поворота соответствует изменению x . Предложенная схема была экспериментально реализована в работе [13]. С ее помощью были приготовлен полный набор состояний из взаимно несмещенных базисов в пространстве кутритов с базисными состояниями $\{|H_1H_2\rangle, |V_1V_2\rangle, |\psi^+\rangle = 1/\sqrt{2}(|H_1V_2\rangle + |V_1H_2\rangle)\}$.

Простая схема для приготовления определенного набора состояний поляризационных куквартов была предложена и реализована экспериментально в работе [14]. В этой схеме невозможно приготовление произвольного состояния, однако ее оказывается достаточно для получения всех состояний из трех взаимно несмещенных базисов в пространстве куквартов, что, как мы увидим далее, является важной для приложений задачей. Экспериментальная установка изображена на рис. 8.

Существенной особенностью этой схемы является использование только

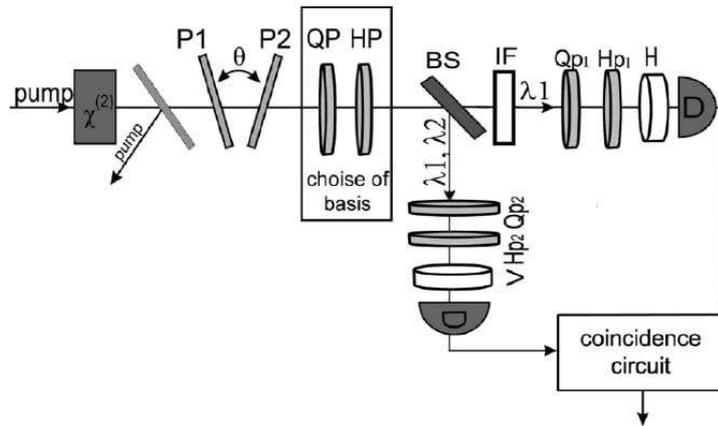


Рис. 8: Схема приготовления кувартов с помощью поляризационных преобразований.

одного кристалла для приготовления всех базисных состояний. Это оказывается возможным при использовании частотно-невырожденного режима СПР. Кристалл, вырезанный для коллинеарного частотно-невырожденного синхронизма типа-I накачивается излучением непрерывного лазера (в работе использовался He-Cd). Состояние на выходе кристалла имеет вид: $|\psi\rangle = |H_1 H_2\rangle$. С помощью кварцевых пластинок с переменной толщиной это состояние преобразовывалось в остальные базисные. Переход к другим базисам (например циркулярному), осуществлялся с помощью пластинок QR и HP. Для анализа приготовленных состояний использовалась томографическая схема, подробно рассмотренная в [15]. Важным преимуществом этого метода, помимо его простоты, является использование коллинеарного режима СПР, что весьма удобно для применения в протоколах передачи информации.

3 Применение кудитов в протоколах квантовой информации

Как уже отмечалось во введении, можно выделить две основные области исследований, в которых находят свое применение многоуровневые оптические системы. Первая связана с проверками фундаментальных основ квантовой теории, вторая - применение кудитов в различных протоколах квантовой информации. В контексте данной работы основной интерес представляют протоколы квантового распределения ключа (КРК), использующие многоуровневые системы.

3.1 Обобщения протокола BB84

Впервые протокол КРК, основанный на кудитах был предложен в работе [16]. Этот протокол является непосредственным обобщением стандартного протокола BB84 на трехуровневые системы. В работе было предложено производить кодирование во взаимно несмещенных базисах ($|\langle e_j, e_k \rangle|^2 = 1/3$, где e_k - базисные векторы), строящихся следующим образом: пусть $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle\}$ - некоторый базис в пространстве кудитов, тогда остальные

три имеют вид:

$$\begin{aligned}
|\alpha'\rangle &= (|\alpha\rangle + |\beta\rangle + |\gamma\rangle) / \sqrt{3}, \\
|\beta'\rangle &= (|\alpha\rangle + e^{2\pi i/3} |\beta\rangle + e^{-2\pi i/3} |\gamma\rangle) / \sqrt{3}, \\
|\gamma'\rangle &= (|\alpha\rangle + e^{-2\pi i/3} |\beta\rangle + e^{2\pi i/3} |\gamma\rangle) / \sqrt{3}, \\
|\alpha''\rangle &= (e^{2\pi i/3} |\alpha\rangle + |\beta\rangle + |\gamma\rangle) / \sqrt{3} + \text{cyclic.permutations} \\
|\alpha'''\rangle &= (e^{-2\pi i/3} |\alpha\rangle + |\beta\rangle + |\gamma\rangle) / \sqrt{3} + \text{cyclic.permutations}.
\end{aligned} \tag{9}$$

С помощью численных расчетов была показана большая устойчивость по отношению к индивидуальным атакам типа перехват-пересылка по сравнению с протоколом BB84. Этот результат интуитивно ясен, поскольку при использовании большего числа состояний и большего количества базисов увеличивается вероятность того, что подслушиватель ошибется при выборе базиса, и таким образом увеличивается процент вносимых им ошибок. Аналогичный протокол для кубитов был рассмотрен в работе [17]. Там же была рассмотрена возможность экспериментальной реализации с помощью четырехплечевой интерферометрической схемы (типа рис.1).

Обобщение рассмотренных протоколов на случай произвольной размерности N и количества используемых базисов M и анализ секретности для общего случая оптимального подслушивания были произведены в работе [18]. Для эффективной скорости передачи ключа, определяемой (с учетом процедур исправления ошибок и усиления секретности) как $R_{AB}(\eta) = \frac{1}{M}[I_{AB}(\eta) - I_{Eve}(\eta)]$, где η - часть ключа, перехваченная подслушивателем, I_{AB}, I_{Eve} - взаимная шенонская информация для легитимных пользова-

телей и подслушивателя, соответственно, было получено выражение:

$$R_{A,B}(\eta) = \frac{1 - \eta}{N + 1} \log_2 N. \quad (10)$$

Максимум $R_{A,B}$ реализуется для $N \approx 4$.

3.2 Детерминистические протоколы

Общим недостатком протокола BB84 и его обобщений является потеря информации и, следовательно, снижение скорости генерации ключа, обусловленная случайным и независимым выбором базисов при приготовлении и измерении состояний легитимными пользователями. Этому недостатка лишены, так называемые, детерминистические протоколы КРК, первый из которых был предложен в работе [19]. Остановимся на этом протоколе подробнее, поскольку экспериментальной реализации его обобщения посвящена значительная часть нашей работы.

Схема предложенного протокола изображена на рис. 9. Протокол устро-

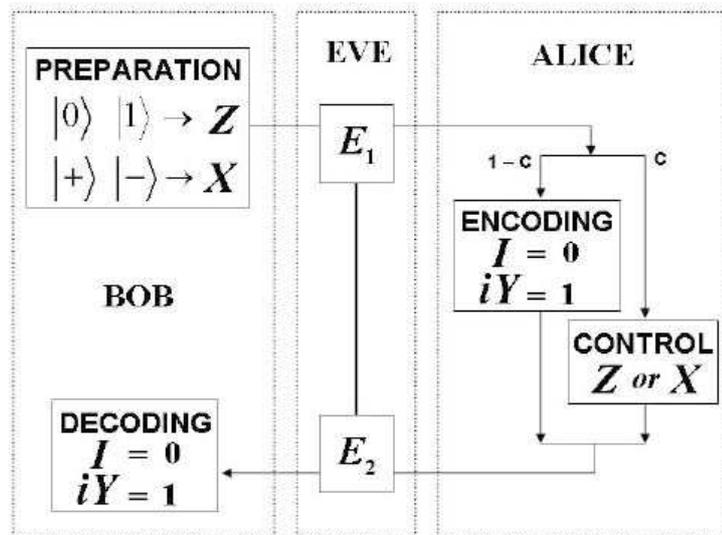


Рис. 9: Детерминистический протокол квантового распределения ключа.

ен следующим образом. Один из пользователей, условно называемый Бобом, изготавливает кубит в одном из состояний принадлежащих двум взаимно несмещенным базисам. Первый из них $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ - базис из собственных векторов оператора Паули Z , второй $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ - оператора Паули X . Выбор между двумя базисами осуществляется случайным образом. После этого Боб посылает кубит по квантовому каналу второму пользователю, условно называемому Алисой. Алиса производит кодирование информации путем применения к полученному кубиту одного из двух унитарных преобразований: тождественного I , соответствующего логическому нулю, или преобразования bit-flip iY , соответствующего логической единице. Оператор bit-flip действует на базисные векторы следующим образом:

$$iY \{|0\rangle, |1\rangle\} = \{-|1\rangle, |0\rangle\}, iY \{|+\rangle, |-\rangle\} = \{|-\rangle, -|+\rangle\}. \quad (11)$$

Т.е. переводит каждый из кубитов в ему ортогональный. После этого, Алиса отправляет преобразованный кубит Бобу, который производит измерение в том же базисе, в котором он изначально приготовил кубит, получая при этом вполне детерминированный результат. Таким образом происходит распределение ключа. Для того, чтобы обеспечить секретность протокола, с определенной вероятностью s Алиса, вместо того, чтобы совершать преобразование, производит проекционное измерение в случайно выбранном базисе. При этом протокол как бы переключается в режим BB84 (так называемый, контрольный режим). В рассматриваемой работе был проведен анализ секретности для этого протокола по отношению к индивидуальным атакам и получено ограничение на допустимый уровень ошибок (QBER) порядка 18% (для BB84 эта цифра составляет 15%).

Для нас, наибольший интерес представляет обобщение рассмотренного

выше протокола, использующее три взаимно несмещенных базиса: базисы из собственных векторов операторов Паули X, Y, Z . Непосредственное обобщение сталкивается с определенными трудностями, обусловленными тем, что не существует унитарного оператора, переводящего все состояния из этих базисов в их ортогональные. Простое решение этой проблемы было найдено в работе [20]. Было предложено кодировать информацию парами кубитов (т.е. фактически, факторизованными состояниями кубитов), причем кубиты в одной паре принадлежат разным базисам. Алиса осуществляет кодирование, применяя операторы I, X, iY, Z , соответствующие значениям двух логических битов к паре кубитов, в результате чего состояние пары либо не меняется, либо переходит в ортогональное (при этом "переворачивается" либо один, либо оба кубита из пары).

4 Схемы приготовления произвольных состояний поляризованных кубитов

Как отмечалось выше, использование поляризованных степеней свободы фотонов - один из наиболее интересных с точки зрения приложений способов реализации оптических кубитов. Мы рассмотрим две экспериментальные схемы приготовления произвольного состояния поляризованного кубита. Одна из них является обобщением на четырехмерный случай схемы, предложенной в работе [10] для кубитов. Вторая использует разложение по модам Шмидта и опирается на идеи, в определенном смысле, аналогичные предложенным в работе [12], однако представляется более удобной для практического применения.

Произвольное чистое состояние поляризационного кукварта имеет вид:

$$|\psi\rangle = c_0 |H_1, H_2\rangle + c_1 |H_1, V_2\rangle + c_2 |V_1, H_2\rangle + c_3 |V_1, V_2\rangle. \quad (12)$$

мы будем рассматривать частотно-невырожденный случай, поэтому индексы мод 1, 2 соответствуют различным длинам волн λ_1, λ_2 . Перепишем вектор состояния в виде:

$$|\psi\rangle = |c_0| |H_1, H_2\rangle + |c_3| e^{i\varphi_{03}} |V_1, V_2\rangle + e^{i\varphi_{01}} (|c_1| |H_1, V_2\rangle + |c_2| e^{i\varphi_{12}} |V_1, H_2\rangle). \quad (13)$$

Заметим, что первые два состояния могут быть получены с помощью СПР типа I, а два состояния в скобках - с помощью типа II. Их когерентная суперпозиция с соответствующими относительными амплитудами и фазами представляет собой произвольное чистое состояние. Для экспериментальной реализации этой идеи была предложена схема, изображенная на рис. 10. В предлагаемой схеме используется импульсная накачка. Две поляриза-

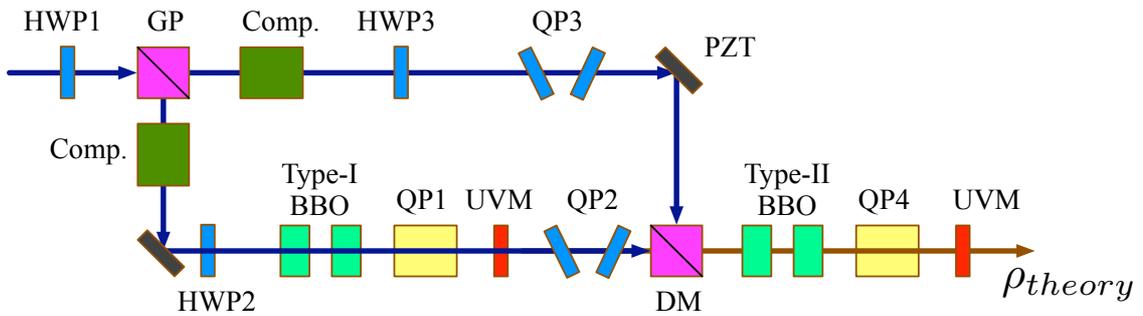


Рис. 10: Схема для приготовления произвольного состояния поляризационного кукварта.

ционные компоненты накачки разделяются на призме Глана-Томсона, служащей входным зеркалом интерферометра Маха-Цандера. Вертикальная компонента идет в отраженный канал, а горизонтальная - в проходящий. В отраженном канале расположены два кристалла ВВО, вырезанные для

частотно-невыврожденного синхронизма типа-I, с ортогонально ориентированными оптическими осями. Таким образом, поворачивая поляризацию накачки с помощью полуволновой пластинки HWP2 можно изменять соотношение между коэффициентами $|c_0|$ и $|c_3|$. Относительная фаза φ_{03} изменяется с помощью пары кварцевых пластинок QP2, эффективная толщина которых, а следовательно и набег фаз, регулируется путем изменения угла наклона. Кварцевая пластинка QP1 служит для компенсации групповых задержек между горизонтально и вертикально поляризованными компонентами. Накачка отрезается ультрафиолетовым зеркалом UVM. В проходящем канале интерферометра пластинки HWP3 и QP3 контролируют соотношение между коэффициентами $|c_1|$ и $|c_2|$ и относительную фазу φ_{12} , соответственно. Для изменения фазы φ_{01} между отраженным и проходящим каналами одно из зеркал интерферометра установлено на пьезоэлектрической подаче PZT. На выходе интерферометра стоит дихроичное зеркало, отражающее накачку из проходящего пучка и пропускающее сигнал в отраженном. Два кристалла ВВО, вырезанные для синхронизма типа-II служат для генерации второй пары состояний из (13), групповые задержки между этими состояниями компенсируются пластинкой QP4.

Заметим, что возможности предложенной схемы не ограничиваются приготовлением только чистых состояний кувартов. Изменяя длину компенсаторов, можно постепенно переходить от когерентного сложения амплитуд состояний к некогерентному, т.е. изменять чистоту приготовляемого состояния.

Рассмотренная выше схема довольно громоздка, требует использования сбалансированного интерферометра, импульсной накачки и компенса-

ции групповых задержек, что приводит к определенным трудностям при экспериментальной реализации. Оказывается, можно предложить значительно более простую схему, если ограничить свои задачи приготовлением только чистых состояний. Вначале рассмотрим математические аспекты проблемы. Известно, что произвольное перепутанное состояние пары кубитов может быть представлено в виде:

$$|\psi\rangle = \sqrt{\lambda_1} |A_1\rangle |A_2\rangle + \sqrt{\lambda_2} |B_1\rangle |B_2\rangle, \quad (14)$$

где $|A_j\rangle$ и $|B_j\rangle$ - базисные векторы пространства состояний каждого из кубитов в отдельности. Это выражение известно под названием разложения Шмидта. Коэффициенты $\lambda_{1,2}$ - собственные значения одночастичных матриц плотности каждого из кубитов (они, как известно совпадают), а вектора A_j и B_j составляют ортогональный базис в котором они диагональны. Таким образом, для приготовления произвольного состояния кубарта достаточно уметь экспериментально контролировать коэффициенты в разложении Шмидта и осуществлять переход между базисами. Заметим, что первая из операций изменяет степень перепутывания состояния (определенную любым разумным образом, например, можно использовать concurrence) и затрагивает степени свободы обоих кубитов, в этом смысле ее можно назвать "нелокальной". Преобразование же базисных векторов требует исключительно локальных операций.

Рассмотрим схему установки, изображенную на рис. 11. В ней используются два нелинейных кристалла, вырезанных для неколлинеарного, частотно невырожденного синхронизма типа-I. Накачкой служит излучение непрерывного лазера, направление линейной поляризации которого контролируется с помощью полуволновой пластинки WP, а относительная фа-

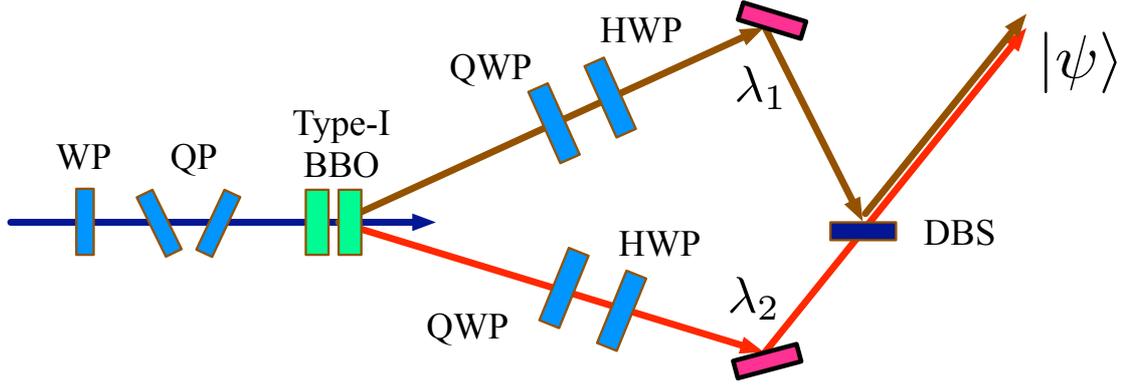


Рис. 11: Схема для приготовления произвольного чистого состояния поляризационного кубита.

за между горизонтальной и вертикальной компонентами регулируется парой пластинок QP. Состояние бифотонов, рождающихся в процессе СПР при таких условиях имеет следующий вид:

$$|\psi\rangle = \sqrt{\lambda_1} |H_1\rangle |H_2\rangle + \sqrt{\lambda_2} |V_1\rangle |V_2\rangle, \quad (15)$$

где индексы 1,2 отвечают различным частотным модам. Состояние каждого из фотонов пары в отдельности определяется матрицей плотности вида

$$\rho_j = \lambda_1 |H_j\rangle \langle H_j| + \lambda_2 |V_j\rangle \langle V_j|, \quad (16)$$

$j = 1, 2$ - индекс подсистемы.

Таким образом, приготовлено состояние с требуемыми значениями коэффициентов в разложении Шмидта, но в фиксированном базисе (H-V). Преобразование к произвольному базису, однако, не составляет труда. Действительно, произвольное поляризационное состояние кубита может быть получено из заданного с помощью последовательности преобразований, осуществляемых четвертьволновой (QWP) и полуволновой (HWP) пластинками. Обозначим это преобразование U_j , тогда $|H_j\rangle \xrightarrow{U_j} |A_j\rangle$, при этом

$|V_j\rangle \xrightarrow{U_j} e^{i\phi} |B_j\rangle$. Фаза ϕ может быть устранена с помощью пластинок QR.

Тогда имеем преобразование:

$$|\psi\rangle \xrightarrow{U_1 \otimes U_2} \sqrt{\lambda_1} |A_1\rangle |A_2\rangle + \sqrt{\lambda_2} |B_1\rangle |B_2\rangle, \quad (17)$$

завершающее процедуру приготовления произвольного состояния кукварта. Из соображений экспериментального удобства, моды 1,2 разделены пространственно благодаря использованию неколлинеарного синхронизма. После осуществления преобразований в каждой моде они сбиваются на дихроичном светоделителе.

В качестве достоинства, присущего обоим схемам, следует отметить использование невырожденного по частоте режима, и соответственно, частотных мод. Это позволяет сформировать в итоге коллинеарный пучок бифотонов, что несомненно удобно для практического применения в различных протоколах.

5 Экспериментальная реализация детерминистического протокола КРК с использованием поляризационных куквартов

Поляризационные состояния двухмодовых бифотонов оказываются естественным объектом для реализации детерминистического протокола квантового распределения ключа. Мы будем рассматривать протокол, предложенный в работе [20], использующий 6 состояний из трех взаимно несмещенных базисов. Поскольку все необходимые состояния факторизованные, для их приготовления достаточно использовать упрощенный вариант схемы,

изображенной на рис. 11, ограничиваясь одним нелинейным кристаллом.

Рассмотрим протокол подробнее, отталкиваясь от его конкретной экспериментальной реализации. Первый пользователь, назовем его Бобом, готовит пары фотонов в состояниях, принадлежащих различным несмещенным базисам, причем фотоны в паре принадлежат разным базисам. Например, можно выбрать следующие 6 состояний:

$$\{|V_1, D_2\rangle, |V_1, L_2\rangle, |D_1, V_2\rangle, |D_1, L_2\rangle, |L_1, V_2\rangle, |L_1, D_2\rangle\}. \quad (18)$$

Здесь $|D_j, A_j\rangle = 1/\sqrt{2}(|H_j\rangle \pm |V_j\rangle)$ - диагональный базис, а $|R_j, L_j\rangle = 1/\sqrt{2}(|H_j\rangle \pm i|V_j\rangle)$ - циркулярный. Приготовленное Бобом состояние посылается второму пользователю - условно, Алисе, который осуществляет одно из четырех возможных поляризационных преобразований:

$$I_1 \otimes I_2, X_1 \otimes X_2, iY_1 \otimes iY_2, Z_1 \otimes Z_2, \quad (19)$$

где I - единичная матрица, а X_j, iY_j, Z_j - операторы Паули, действующие в соответствующей моде. В результате, состояние либо не изменяется, либо переходит в ортогональное, что позволяет Бобу, при проведении проективного измерения над преобразованным состоянием в том же базисе, в котором он его приготовил, получать детерминированный результат. С экспериментальной точки зрения, весь набор преобразований может быть осуществлен с помощью соответствующим образом подобранных кварцевых пластинок.

Одной из целей работы была экспериментальная демонстрация возможности приготовления необходимых состояний и осуществления требуемых унитарных преобразований. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 12. В ней можно выделить три основные части: "установка Бо-

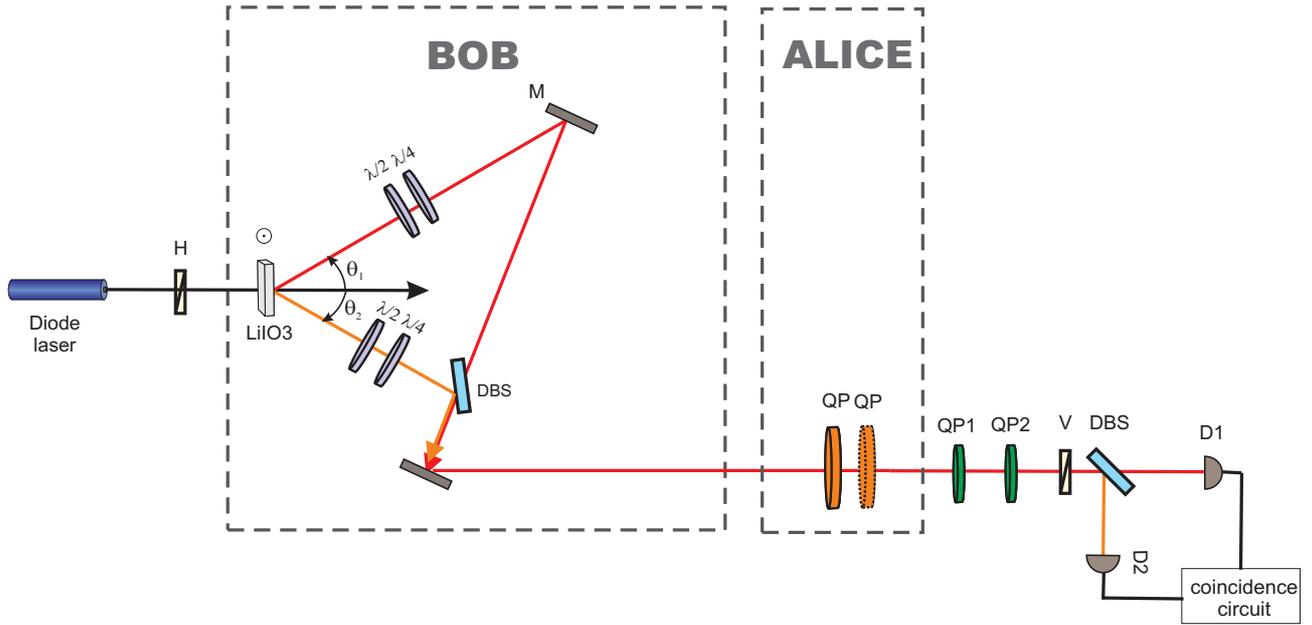


Рис. 12: Экспериментальная установка.

ба на которой осуществляется приготовление состояний, "установка Алисы реализующая преобразования, и схема поляризационной томографии, позволяющая восстанавливать приготовленный вектор состояния и контролировать правильность выполнения преобразований. В качестве накачки использовался непрерывный диодный лазер мощностью 50 мВт на длине волны 405 нм. Бифотоны рождались в процессе СПР в кристалле LiIO_3 , вырезанном для неколлинеарного, частотно невырожденного синхронизма типа-I. Для длин волн сигнального и холостого фотонов были выбраны значения $\lambda_1 = 750\text{нм}$ и $\lambda_2 = 880.4\text{нм}$. Оба пучка сбивались на дихроичном светоделителе (DBS), пропускающем излучение на длине волны 880 нм, и отражающем на длине волны 750 нм. Следует отметить, что в отличие от схемы на рис. 11, в реальной установке использовалось всего одно зеркало, такая геометрия эксперимента позволяет максимально уменьшить углы падения для зеркала и светоделителя, чтобы избавиться от нежелательных

эффектов преобразования поляризации при отражении. Для реализации описанных в предыдущей части преобразований в каждое плечо схемы помещался набор из кварцевых четвертьволновой и полуволновой для соответствующей длины волны пластинок нулевого порядка.

Схему Алисы удалось реализовать с использованием только двух кварцевых пластинок. Несложно выяснить, каким поляризационным преобразованиям соответствуют матрицы Паули. Преобразованию Z_j соответствует полуволновая на длине волны λ_j пластинка, с вертикально ориентированной осью, преобразованию X_j - полуволновая пластинка, ориентированная под углом 45^0 к вертикали, а преобразованию $iY_j = Z_jY_j$ - последовательное применение этих преобразований. Оказывается, что можно подобрать толщину кварцевой пластинки таким образом, чтобы она была полуволновой для обеих используемых длин волн. При этом для одной длины волны она будет пластинкой порядка m , а для другой - порядка n (т.е. вносимая ей разность хода между обыкновенной и необыкновенной волнами будет $\lambda_1/2 + m\lambda_1$ и $\lambda_2/2 + n\lambda_2$, соответственно). В нашем случае получилось $m = 5$ для $\lambda_1 = 880.4$ и $n = 6$ для $\lambda_2 = 750$, что соответствует толщине пластинки 545 мкм. Таким образом, для реализации преобразований (19) достаточно использовать одни и те же пластинки QR для обеих длин волн, не производя пространственного разделения частотных мод, что существенно облегчает экспериментальную процедуру.

Томографическая схема состоит из двух кварцевых пластинок произвольной заданной толщины, горизонтально ориентированной призмы Глана и схемы Брауна-Твисса, детекторы в обоих плечах которой объединены схемой совпадений. Такая установка позволяет полностью восстановить

вектор состояния по результатам серии измерений, отличающихся поворотами оптических осей пластинок QP1,2, эта процедура подробно описана в [15], и мы не будем на ней останавливаться.

Было проведено две серии экспериментов. В первой из них были приготовлены все шесть состояний, и проведена их полная томография, затем каждое из состояний подвергалось преобразованиям вида (19), и для преобразованных состояний также выполнялась томография. Результаты представлены в таблицах 1 и 2. В таблице 1 приведены коэффициенты разложения восстановленных по результатам томографии состояний (в стандартном H-V базисе), соответствующие стандартные отклонения, и fidelity (определяемая как $F = \langle \psi_{exp} | \psi_{th} \rangle$, где ψ_{exp} - восстановленное состояние, а ψ_{th} - состояние, которое требовалось приготовить). В таблице 2, из соображений удобочитаемости, приведены только значения fidelity для состояний после преобразований соответствующими операторами (по столбцам), а коэффициенты разложения опущены.

В целом достаточно высокие значения fidelity, достигнутые в эксперименте, могут служить подтверждением высокого качества приготовления и преобразования поляризационных состояний. Некоторые несоответствия между приготовленными состояниями и ожидаемыми, тем не менее присутствуют, как можно видеть из таблицы 2. Более высокие значения fidelity для первой серии экспериментов позволяют предположить, что основным источником погрешностей является "установка Алисы а именно неточности в изготовлении кварцевых пластинок, которые могут привести к значительным погрешностям в преобразовании, поскольку используются пластинки принципиально высокого порядка.

Состояние	Теория	Эксперимент	Ошибка	Fidelity
$ V_1D_2\rangle$	0	$-0.0005 - 0.003i$	$0.004 + 0.002i$	$F = 0.98 \pm 0.02$
	0	$0.003 + 0.07i$	$0.005 + 0.0003i$	
	0.707	$0.736 - 0.125i$	$0.006 + 0.005i$	
	0.707	0.661	$0.005 + 0.005i$	
$ V_1L_2\rangle$	0	$0.0002 - 0.0005i$	$0.006 + 0.002i$	$F = 0.991 \pm 0.0001$
	0	$0.055 - 0.007i$	$0.006 + 0.005i$	
	$0.707i$	$-0.101 - 0.717i$	$0.004 + 0.001i$	
	0.707	0.688	$0.003 + 0.001i$	
$ D_1V_2\rangle$	0	$-0.007 - 0.006I$	$0.004 + 0.001i$	$F = 0.98 \pm 0.01$
	0.707	$0.705 - 0.137i$	$0.006 + 0.0005i$	
	0	$-0.012 + 0.066i$	$0.006 + 0.006i$	
	0.707	0.693	$0.005 + 0.002i$	
$ D_1L_2\rangle$	$-0.5i$	$-0.096 - 0.541i$	$0.006 + 0.0002i$	$F = 0.979 \pm 0.0004$
	0.5	$0.546 - 0.119i$	$0.009 + 0.006i$	
	$-0.5i$	$-0.072 - 0.411i$	$0.003 + 0.001i$	
	0.5	0.460	$0.006 + 0.002i$	
$ L_1V_2\rangle$	0	$0.008 - 0.010i$	$0.006 + 0.0006i$	$F = 0.99 \pm 0.02$
	$-0.707i$	$-0.035 - 0.715i$	$0.002 + 0.0008i$	
	0	$0.053 + 0.031i$	$0.007 + 0.007i$	
	0.707	0.696	$0.006 + 0.0002i$	
$ L_1D_2\rangle$	$-0.5i$	$0.012 - 0.516i$	$0.006 + 0.0002i$	$F = 0.9845 \pm 0.0002$
	$-0.5i$	$-0.050 - 0.469i$	$0.005 + 0.004i$	
	0.5	$0.577 + 0.009$	$0.008 + 0.002i$	
	0.5	0.423	$0.007 + 0.005i$	

Таблица 1: Приготовленные состояния и соответствующие значения fidelity.

	I	$X_1 \otimes X_2$	$Y_1 \otimes Y_2$	$Z_1 \otimes Z_2$
$ V_1 D_2\rangle$	98.40	96.99	96.93	97.89
$ V_1 L_2\rangle$	99.13	98.15	98.06	96.51
$ D_1 V_2\rangle$	98.60	94.90	97.76	96.94
$ L_1 V_2\rangle$	99.53	98.25	97.21	99.18
$ D_1 L_2\rangle$	97.93	98.25	98.08	97.20
$ L_1 D_2\rangle$	98.45	98.86	98.78	98.99

Таблица 2: Fidelity для базисных состояний после преобразования.

Проведенные серии экспериментов не позволяют, разумеется, говорить о практической реализации системы квантового распределения ключа, однако, они убедительно свидетельствуют о принципиальной возможности использования поляризационных состояний бифотонов в протоколах рассматриваемого типа.

6 Экспериментальная реализация схемы приготовления произвольного состояния кукварта

Экспериментальная реализация схемы, изображенной на Рис.11, состояла из двух этапов. Первый из них заключался в приготовлении факторизованных состояний куквартов особого типа, предназначенных для реализации детерминистического протокола КРК, с помощью упрощенного варианта схемы с одним нелинейным кристаллом. Подробное описание этого эксперимента приведено выше. Более сложной оказалась задача о пригото-

нии перепутанных состояний, требующая использования двух кристаллов. В этой части работы обсуждаются особенности спонтанного параметрического рассеяния в такой ситуации и экспериментальные решения, позволяющие добиться высокого качества приготовления перепутанных состояний, а также приводятся предварительные экспериментальные результаты.

Рассмотрим процесс СПР типа I в неколлинеарном, частотно- невырожденном режиме, происходящий в двух одинаковых кристаллах длины L , с ортогонально ориентированными оптическими осями. Пусть, для определенности, ось первого кристалла ориентирована вертикально, а второго - горизонтально. Мы рассмотрим случай непрерывной накачки линейно поляризованной под углом 45° . В приближении плоской волны накачки состояния бифотонных пар, рождающихся в каждом из кристаллов по отдельности имеют вид [21]:

$$|\psi_{1,2}\rangle = \int d\Omega d\theta_1 d\theta_2 e^{i\frac{\Delta_z L}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\Delta_z L}{2}\right) a_{V,H}^\dagger(\theta_1, \omega_1 + \Omega) a_{V,H}^\dagger(\theta_2, \omega_2 - \Omega) |\text{vac}\rangle, \quad (20)$$

где $\Delta_z = k_o(\omega_1 + \Omega, \theta_1) + k_o(\omega_2 - \Omega, \theta_1) + k_e(\omega_p)$ - продольная расстройка фазового синхронизма (накачка является необыкновенной, а сигнальный и холостой фотоны - обыкновенными волнами в кристалле). Рассмотрим случай, когда угловые моды выделены с помощью узких диафрагм, тогда интегрирование по углам снимается, и можно ограничиться исследованием частотного спектра. Если длина когерентности накачки больше, чем расстояние между кристаллами, то соответствующие амплитуды складываются когерентно, и полное состояние будет суперпозицией $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2} (|\psi_1\rangle + e^{i\varphi(\Omega)} |\psi_2\rangle)$. Наличие дополнительной относительной фазы φ обусловлено двумя причинами: набегом фазы между поляризационными

компонентами накачки в первом кристалле и появлением дополнительной фазы у фотонов, рожденных в первом кристалле при их прохождении через второй кристалл [22]:

$$\varphi(\Omega) = (k_e(\omega_p) - k_o(\omega_p))L + (k_e(\omega_1 + \Omega) + k_e(\omega_2 - \Omega))L. \quad (21)$$

Первое слагаемое в (21) не зависит от частотной отстройки от синхронизма Ω и может быть легко скомпенсировано введением соответствующего фазового сдвига между поляризационными компонентами накачки. Второе же слагаемое обусловлено частотной дисперсией и становится причиной появления различных фазовых сдвигов для различных частот внутри спектральной линии СПР. Таким образом, для того, чтобы генерируемое поляризационное состояние представляло собой максимально перепутанное состояние кукварта, необходимо выделить узкую спектральную полосу внутри спектра СПР. На практике для этого используют интерференционные фильтры, которые все же имеют конечную ширину. В связи с этим рассмотрим влияние дисперсионных эффектов на свойства генерируемого состояния. В первом порядке по малой расстройке Ω имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_z(\Omega) &= \left[\left(\frac{\partial k_o(\omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega_1} - \left(\frac{\partial k_o(\omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega_2} \right] \Omega = \left[\frac{1}{v_o^{gr}(\omega_1)} - \frac{1}{v_o^{gr}(\omega_2)} \right] \Omega = C_o \Omega, \\ \varphi(\Omega) &= \left[\left(\frac{\partial k_e(\omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega_1} - \left(\frac{\partial k_e(\omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega_2} \right] L \Omega = \left[\frac{1}{v_e^{gr}(\omega_1)} - \frac{1}{v_e^{gr}(\omega_2)} \right] L \Omega = C_e L \Omega. \end{aligned} \quad (22)$$

$$(23)$$

Здесь $v_{o,e}^{gr}(\omega) = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_{o,e}} \right)$ - групповая скорость волновых пакетов с соответствующими центральными частотами. Выражение (22) определяет форму спектральной линии СПР: $F(\Omega) = \text{sinc}(C_o L \Omega / 2)$. Нам будет удобнее рассмотреть временную картину и перейти от спектральных характеристик к

временным корреляциям. Корреляционная функция второго порядка связана со спектром следующим образом[23]:

$$G^{(2)}(\tau) = \left| \int d\Omega F(\Omega) \cos(\Omega\tau) \right|^2. \quad (24)$$

В случае симметричной функции $F(\Omega)$ получаем обычное преобразование Фурье. Таким образом, в нашем случае корреляционные функции излучения от каждого из кристаллов будут иметь вид прямоугольников шириной $\tau_1 = C_o L$. Наличие сдвига фаз $\varphi(\Omega)$ на временном языке будет означать относительный сдвиг корреляционных функций на величину $\tau_2 = C_e L$ (см. Рис.13).

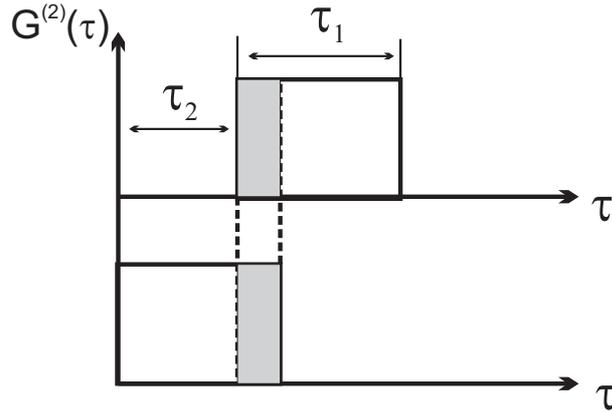


Рис. 13: Корреляционная функция второго порядка для СПР от двух ортогонально ориентированных кристаллов.

Относительный сдвиг корреляционных функций излучения от первого и второго кристалла приводит к различимости рожденных в них пар фотонов по моменту их регистрации, и следовательно к уменьшению видности поляризационной интерференции. Рассмотрим этот вопрос с экспериментальной точки зрения. Схема установки приведена на Рис.14. В качестве накачки использовалось излучение гелий-кадмиевого лазера на

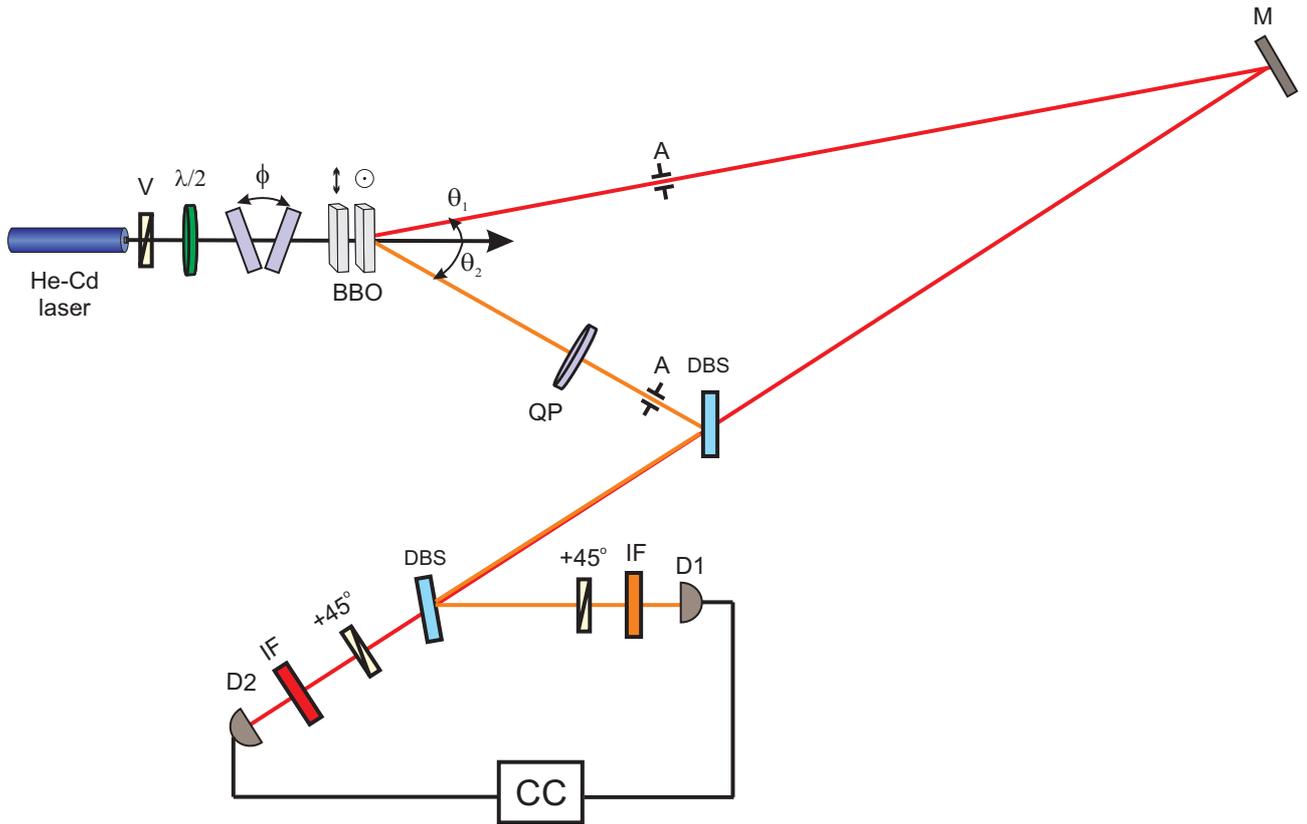


Рис. 14: Экспериментальная установка для приготовления перепутанных состояний.

длине волны 325нм. Вертикальная поляризация выделялась из изначально неполяризованного излучения с помощью призмы Глана V, после чего она поворачивалась полуволновой пластинкой. Относительная фаза ϕ между поляризационными компонентами накачки вносилась с помощью двух кварцевых пластинок с вертикально ориентированными оптическими осями, эффективная толщина которых определялась углом их относительно наклона θ . Параметрическое рассеяние происходило в двух кристаллах ВВО толщиной 2мм каждый, вырезанных для коллинеарного частотно-вырожденного синхронизма. Направления, соответствующие рабочим длинам волн $\lambda_1 = 600\text{нм}$ и $\lambda_2 = 710\text{нм}$, выделялись диафрагмами А, после чего пучки сбивались на дихроичном светоделителе, пропускающем на длине волны 600 нм, и полностью отражающем на 710 нм. В измерительной части

пары делились по частоте с помощью аналогичного светоделителя. В каждом из каналов измерительной схемы стояли полимерные поляризаторы, ориентированные под углом 45° к вертикали и интерференционные фильтры на 600 нм и 710 нм, соответственно, с шириной полосы пропускания 10 нм. Совпадения фотоотсчетов детекторов D1 и D2 регистрировались с помощью схемы совпадений СС с окном 2 нс.

В идеальном случае, когда поляризационное состояние бифотона имеет вид $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2} (|H_1H_2\rangle + e^{i\phi} |V_1V_2\rangle)$, скорость счета совпадений в такой схеме

$$R_C \propto |\langle +45_1, +45_2 | (|H_1H_2\rangle + e^{i\phi} |V_1V_2\rangle) \rangle|^2 \propto 1 + \cos \phi,$$

где фаза ϕ изменяется с изменением наклона кварцевых пластинок в пучке накачки. В реальности, ввиду частичной различимости пар, рождающихся в первом и втором кристаллах, из-за неполного перекрытия соответствующих корреляционных функций, видность интерференционной картины, определяемая как $V = \frac{R_{Cmax} - R_{Cmin}}{R_{Cmax} + R_{Cmin}}$, существенно отлична от 1. При фиксированном частотном спектре, определяемом в нашем случае полосой пропускания интерференционного фильтра (она оказывается уже, чем ширина спектра СПР, составляющая в данном режиме около 12 нм), увеличить видность можно с помощью введения в пучок с меньшей длиной волны дополнительного двулучепреломляющего компенсатора QR. Кварцевый компенсатор с вертикально ориентированной оптической осью задерживает вертикально поляризованный фотон пары на время $\tau_{comp} = [(\frac{1}{v_e^{gr}(\omega_1)} - \frac{1}{v_o^{gr}(\omega_1)})L_q]$, где $v_{o(e)}^{gr}$ - групповые скорости обыкновенной и необыкновенной волны в кварце, а L_q - длина компенсатора. Выбором длины компенсатора такой, чтобы $\tau_{comp} = \tau_2$, можно добиться полного перекрытия корреляцион-

ных функций, и следовательно максимальной видности интерференционной картины.

На рис.15 представлена экспериментальная зависимость видности интерференционной картины от длины использованного кварцевого компенсатора. Расчет дает для ширины и сдвига корреляционных функций в на-

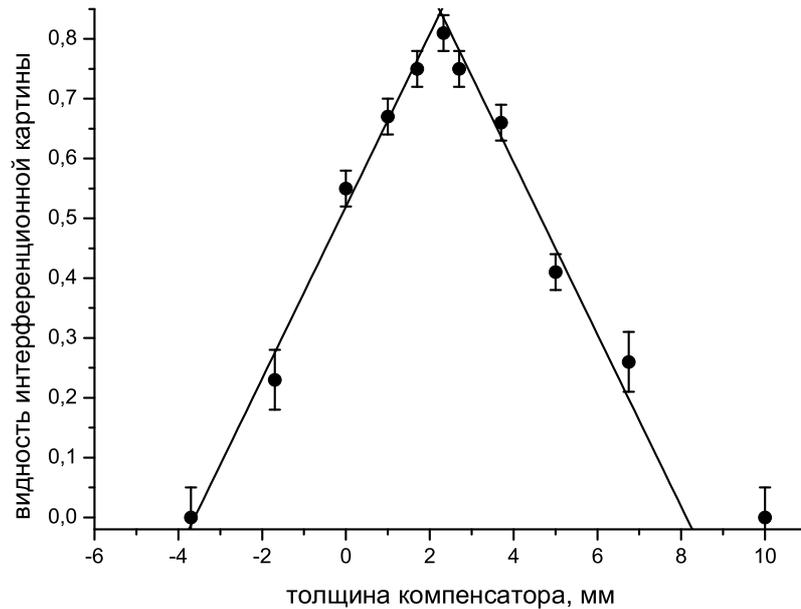


Рис. 15: Зависимость видности поляризационной интерференции от толщины компенсатора дисперсии групповых скоростей.

шем случае значения: $\tau_1 = 96$ фс, $\tau_2 = 87$ фс, что соответствует длине компенсатора 2.6мм, в хорошем соответствии с экспериментальными данными. Небольшое отличие положения максимума видности в эксперименте (2.3 мм), от расчетного, скорее всего, объясняется неточностями в использованных значениях групповых скоростей. Примеры характерных интерференционных картин с компенсатором и без приведены на рис.16.

Отличие видности от 1, даже при использовании компенсатора нужной

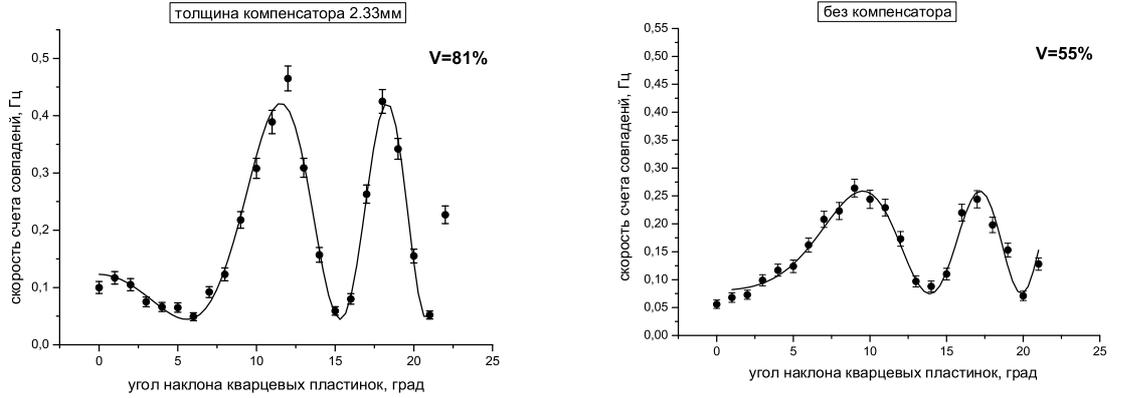


Рис. 16: Интерференционные картины, полученные без компенсатора и с компенсатором, толщиной 2.33мм.

длинны возможно объясняется двумя причинами. Первая из них "техническая" и заключается в плохом выделении пространственных мод. Вторая - влияние квадратичных по расстройке частоты Ω членов в разложении $\varphi(\Omega)$, приводящие к неодинаковому уширению корреляционных функций, и следовательно не 100% видности даже при идеальной компенсации линейной по расстройке части [22].

Низкая видность поляризационной интерференции соответствует плохому качеству приготовления перепутанных состояний. Полученные в настоящее время результаты томографии состояния

$$|\Phi^+\rangle = 1/\sqrt{2} (|H_1 H_2\rangle + |V_1, V_2\rangle),$$

соответствующего максимуму интерференционной картины, дают значения *fidelity* не более 75%. Тем не менее, мы не видим никаких принципиальных ограничений сверху на это значение. В дальнейшем предполагается добиться значений выше 90% путем лучшего выделения пространственных

мод, и возможно, использованием более узких частотных фильтров. Само по себе наблюдение двухфотонной интерференции с ненулевой видностью говорит о том, что приготовление перепутанных состояний в предложенной схеме возможно, улучшение же качества приготовления является технической задачей, которая в данный момент решается.

7 Неабелева геометрическая фаза и ее проявления при поляризационных преобразованиях двухмодовых бифотонов

Преобразования состояний двухмодовых бифотонов можно разделить на два существенно различных класса. Первый класс преобразований затрагивает лишь поляризационные состояния в каждой из двух мод в отдельности, второй включает в себя преобразования, "перемешивающие" моды. В квантовой теории информации принято называть первый тип преобразований "локальными" а второй "нелокальными". Локальные преобразования оставляют инвариантной степень перепутанности состояния, определяемую с помощью любой разумной меры. В предыдущей части работы мы рассматривали только локальные поляризационные преобразования, а степень перепутанности приготавливаемых состояний задавалась изначально (например, поворотом поляризации накачки в схеме на Рис.11). Такая классификация преобразований оказывается естественной не только с точки зрения различных информационных протоколов, где две моды ассоциируются с двумя различными участниками, но и с физической точки зрения. Оказывается возможным надделить Гильбертово пространство

состояний определенной структурой, позволяющей глубже понять природу перепутывания в двухмодовых системах и рассмотреть ряд эффектов "геометрической" природы, аналогичных известным проявлениям геометрической фазы в поляризационных преобразованиях.

Понятие неабелевой геометрической фазы было введено в работе [24]. Авторы рассматривали произвольную систему с гамильтонианом $H(\lambda)$ зависящим от параметров $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Пусть гамильтониан имеет вырожденный уровень с кратностью вырождения N и соответствующим собственным подпространством \mathbb{H}_d . Для простоты положим, что это подпространство соответствует нулевому значению энергии. Рассмотрим эволюцию системы при медленном изменении параметров $\lambda_\mu(t), t \in (0, T)$. Наиболее интересен случай циклической эволюции, для которого $\lambda_\mu(T) = \lambda_\mu(0)$. В адиабатическом приближении переходы между различными энергетическими уровнями отсутствуют и состояния $|\psi(T)\rangle$ по прежнему принадлежат \mathbb{H}_d , однако они оказываются связанными с начальными состояниями нетривиальным унитарным преобразованием: $|\psi(T)\rangle = U_\gamma |\psi(0)\rangle$, зависящим от формы траектории γ в пространстве параметров. Пусть $\{|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_N\rangle\}$ - базис в \mathbb{H}_d , тогда можно показать, что

$$U_\gamma = \mathbf{P} \exp \oint_\gamma A(\tau) d\tau, \quad (25)$$

где $A(\tau) d\tau = \sum_\mu A_\mu d\lambda_\mu$, а матричные элементы операторов A_μ определяются выражением

$$(A_\mu)_{ij} = \langle \psi_i | \partial / \partial \lambda_\mu | \psi_j \rangle. \quad (26)$$

Эквивалентно, эту ситуацию можно рассматривать как эволюцию вырожденного подпространства \mathbb{H}_d в пространстве состояний \mathbb{H} , по траек-

тории, параметризованной временем τ . Таким образом, пространство \mathbb{H} естественным образом приобретает структуру *расслоения*: базовым пространством расслоения является фактор-пространство \mathbb{H}/\mathbb{H}_d , элементами которого являются классы эквивалентности векторов состояний, отличающихся друг от друга только преобразованиями, оставляющими \mathbb{H}_d инвариантным, а слоем - \mathbb{H}_d . Форма $A = A(\tau)d\tau$, определяемая выражением (26) называется *связностью Вилчека-Зи (Wilczek-Zee connection)*, а соответствующая ей голономия U_γ - *неабелевой геометрической фазой*.

Аналогичную математическую структуру можно обнаружить и при рассмотрении эволюции поляризационных состояний двухмодовых бифотонов, подвергающихся нелокальным преобразованиям. Рассмотрим, следуя работе [25], состояние пары тождественных фотонов в двух пространственных модах a и b . Назовем преобразования вида $U(2)^a \times U(2)^b \subset U(4)$, т.е. поляризационные вращения, происходящие независимо в каждой из мод, *локальными*, остальные преобразования группы общей группы $U(4)$ "перемешивающие" пространственные моды (например, таковыми являются преобразования, осуществляемые светоделителями), будем называть *нелокальными*.

Введем отношение эквивалентности следующим образом: будем считать эквивалентными все состояния, отличающиеся друг от друга только локальными преобразованиями: $|\widetilde{\psi}\rangle \simeq |\psi\rangle$, если $|\widetilde{\psi}\rangle = K|\psi\rangle$, $K \in U(2)^a \times U(2)^b$. Например, эквивалентными оказываются все состояния с ровно одним фотоном в каждой пространственной моде, это подпростран-

ство $\mathbb{H}_{(1,1)}$ - линейная оболочка базисных состояний

$$\begin{aligned} |HH\rangle &= a_H^\dagger b_H^\dagger |0\rangle, |HV\rangle = a_H^\dagger b_V^\dagger |0\rangle \\ |VH\rangle &= a_V^\dagger b_H^\dagger |0\rangle, |VV\rangle = a_V^\dagger b_V^\dagger |0\rangle. \end{aligned} \quad (27)$$

Такие состояния можно получить, например, в процессе неколлинеарного вырожденного СПР.

Полное пространство состояний \mathbb{H}_2 (оно десятимерно), можно разбить на классы эквивалентности относительно локальных преобразований. Каждый такой класс будет точкой многообразия, которое мы будем называть *геометрическим пространством*. Таким образом, пространство \mathbb{H}_2 приобретает структуру расслоения с геометрическим пространством в качестве базового многообразия. Пусть $G(s) \in U(4)$, $s \in (0, s_0)$ - некоторое параметризованное преобразование. Выберем некоторое состояние $|\psi_0\rangle \in \mathbb{H}_{(1,1)}$, его эволюции под действием $G(s)$ будет соответствовать некоторая траектория в \mathbb{H}_2 - сечение расслоения. Пусть проекция этой траектории на геометрическое пространство - кривая $\mathcal{C}(s)$. Выбор $G(s_0) \in U(2)^a \times U(2)^b$ обеспечивает замкнутость этой кривой. Для связности, согласно (26) получаем выражение:

$$A_{ab} = \langle \psi_a(s) | d/ds | \psi_b(s) \rangle = \langle \psi_a(0) | G^\dagger(s) \frac{dG(s)}{ds} | \psi_b(s) \rangle. \quad (28)$$

Преобразование начального состояния под действием $G(s)$ можно разделить на две части: неабелеву фазу $K_{NAGP} = \mathbf{P} \exp \oint_{\mathcal{C}} A ds$ и некоторое дополнительное локальное преобразование K . От него можно избавиться с помощью *калибровочных преобразований* - смены координат в слое расслоения $|\psi(s) \rightarrow K(s) |\psi(s)\rangle$. Связность при этом преобразуется следующим образом: $A \rightarrow K^\dagger A K + i K^\dagger dK$, а неабелева геометрическая фаза, как это

и должно быть, остается инвариантной. Схематически рассмотренная картина изображена на рис.17. Геометрическое пространство обозначено как GS , траектория в нем - \mathcal{C} , а соответствующая траектория $G(s) |\psi(s_0)\rangle$ - как $G(s)$. Разумеется, к изображению следует относиться только как к добавляющей наглядности иллюстрации, поскольку точкам на рисунке в действительности соответствуют вектора в десятимерном гильбертовом пространстве, а изображенному отрезком сдвигу фаз $K + K_{NAGP}$ - унитарный оператор.

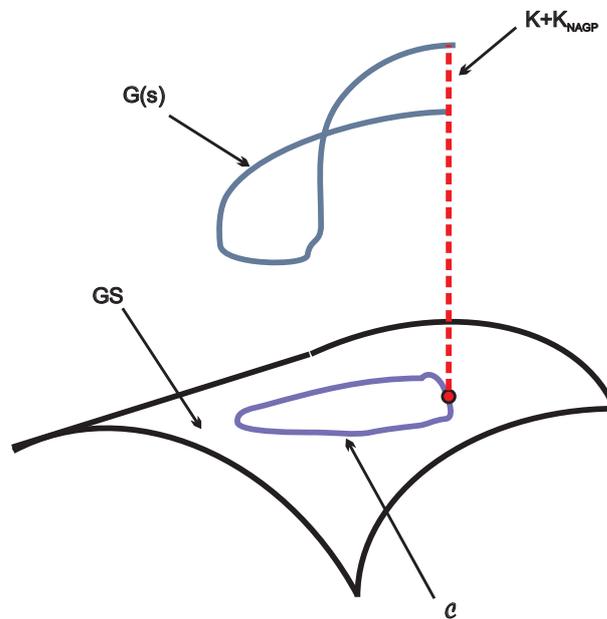


Рис. 17: Схематическое изображение структуры расслоенного пространства состояний.

Для того, чтобы наблюдать проявления неабелевой геометрической фазы в бифотонных системах экспериментально, необходимо создать устройство, которое осуществляло бы параметризованное нелокальное преобразование совместно с вращением поляризации. Идеальным средством для этого являлся бы "непрерывный" аналог светоделителя, т.е. устройство, в котором происходит постепенная перекачка энергии между пространственными

модами a и b . Именно такая ситуация реализуется в волоконно-оптических светоделителях - элементах, состоящих из двух одномодовых оптических волокон, идущих параллельно на малом расстоянии друг от друга. В такой системе электромагнитное поле "туннелирует" из одного волокна в другое за счет эффекта нарушенного полного внутреннего отражения (рис. 18).

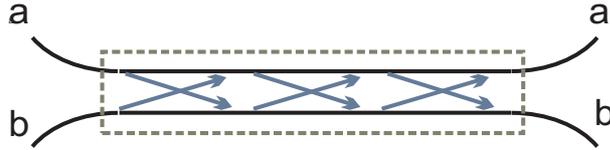


Рис. 18: Волоконный светоделитель.

Рассмотрим происходящие в таком процессе преобразования более подробно. Эволюцию вектора поляризационного состояния бифотонного волнового пакета, проходящего через волоконный светоделитель можно описать уравнением Шредингера с гамильтонианом вида (см. например [26]):

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} = \sum_{\sigma=H,V} \hbar\omega (a_{a\sigma}^\dagger a_{a\sigma} + a_{b\sigma}^\dagger a_{b\sigma}) + \varepsilon (a_{a\sigma}^\dagger a_{b\sigma} + a_{b\sigma}^\dagger a_{a\sigma}), \quad (29)$$

где операторы $a_{a(b)\sigma}$ уничтожают фотоны в соответствующих пространственных и поляризационных модах. Первое слагаемое описывает распространение волнового пакета по волокнам, а второе - взаимодействие между модами, т.е. тунеллирование за счет нарушенного полного внутреннего отражения. Мы будем считать, что константа связи ε не зависит от поляризации фотонов. Оператор эволюции $\hat{U}_{int} = \exp(it\hat{H}_{int})$, соответствующий такому гамильтониану взаимодействия представляет собой оператор неполяризацтонного светоделителя с коэффициентами пропускания и отражения $T = i \cos \varepsilon t$ и $R = \sin \varepsilon t$, где переменная t имеет смысл времени распространения пакета через светоделитель.

Кроме того, в каждом из волокон независимо происходит поляризационное преобразование, гамильтониан которого имеет вид:

$$\hat{H}_{pol} = \sum_{j=1}^3 (J_{aj}\alpha_j + J_{bj}\beta_j), \quad (30)$$

где $J_{a(b)j}$ - операторы Стокса:

$$\begin{aligned} \hat{J}_{a1} &= 1/2(a_{aH}^\dagger a_{aV} + a_{aV}^\dagger a_{aH}) \\ \hat{J}_{a2} &= 1/2(a_{aH}^\dagger a_{aV} - a_{aV}^\dagger a_{aH}) \\ \hat{J}_{a3} &= 1/2(a_{aH}^\dagger a_{aH} - a_{aV}^\dagger a_{aV}), \end{aligned} \quad (31)$$

и аналогичные выражения для моды b .

В качестве примера, приведем явный вид описанных преобразований для частного случая $\hat{H}_{pol} = \hat{H}_x = \alpha_x(\hat{J}_{ax} + J_{bx})$. Эволюция состояния определяется оператором $G(t) = \exp i(\hat{H}_0 + \hat{H}_{int} + \hat{H}_x)t$. Тривиальный фазовый сдвиг, соответствующий преобразованию $G_0(t) = \exp i\hat{H}_0 t$, очевидно, может быть отброшен. Замкнутой траектории в геометрическом пространстве будет отвечать время эволюции $t_0 = 2\pi\hbar/\varepsilon$ (или длина взаимодействующего участка волокон $L = ct_0 = 2\pi c\hbar/\varepsilon$), которому соответствует значение коэффициента пропускания $T=1$. При этом вычисленная, согласно формуле (28) связность имеет вид:

$$A = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_x & \alpha_x & 0 \\ \alpha_x & 0 & 0 & \alpha_x \\ \alpha_x & 0 & 0 & \alpha_x \\ 0 & \alpha_x & \alpha_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

а соответствующая ей неабелева геометрическая фаза:

$$K_{NAGP} = \begin{pmatrix} \cos^2(\pi\alpha_x) & -\frac{i}{2}\sin(2\pi\alpha_x) & -\frac{i}{2}\sin(2\pi\alpha_x) & -\sin^2(\pi\alpha_x) \\ -\frac{i}{2}\sin(2\pi\alpha_x) & \cos^2(\pi\alpha_x) & -\sin^2(\pi\alpha_x) & -\frac{i}{2}\sin(2\pi\alpha_x) \\ -\frac{i}{2}\sin(2\pi\alpha_x) & -\sin^2(\pi\alpha_x) & \cos^2(\pi\alpha_x) & -\frac{i}{2}\sin(2\pi\alpha_x) \\ -\sin^2(\pi\alpha_x) & -\frac{i}{2}\sin(2\pi\alpha_x) & -\frac{i}{2}\sin(2\pi\alpha_x) & \cos^2(\pi\alpha_x) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

K_{NAGP} - это некоторое преобразование, которое сам по себе не является непосредственно измеряемой величиной. Тем не менее, его матричные элементы могут быть рассчитаны на основании экспериментальных данных с помощью следующей процедуры: необходимо подвергнуть преобразованию последовательно все базисные вектора, восстановить преобразованные состояния с помощью любого томографического протокола, и определить таким образом, вид матрицы преобразования. Как отмечалось выше, помимо собственно геометрической части, полное преобразование $G(s_0)$ содержит некоторое дополнительное локальное преобразование K , которое тем не менее, ввиду его локальности, несложно устранить сменой калибровки. Физически этому будет соответствовать измерение в базисе отличном от исходного - его базисные вектора получаются преобразованием начальных оператором K^{-1} .

Схема экспериментальной установки, реализующей описанную процедуру приведена на рис.19. В качестве источника пар фотонов предлагается использовать спонтанное параметрическое рассеяние в частотно вырожденном неколлинеарном режиме. Заведенное в пару оптических волокон с помощью короткофокусных объективов излучение СПР проходит через волоконно-оптический светоделитель, коэффициенты пропускания и отражения, а также поляризационные вращения в каждой из мод контролируются

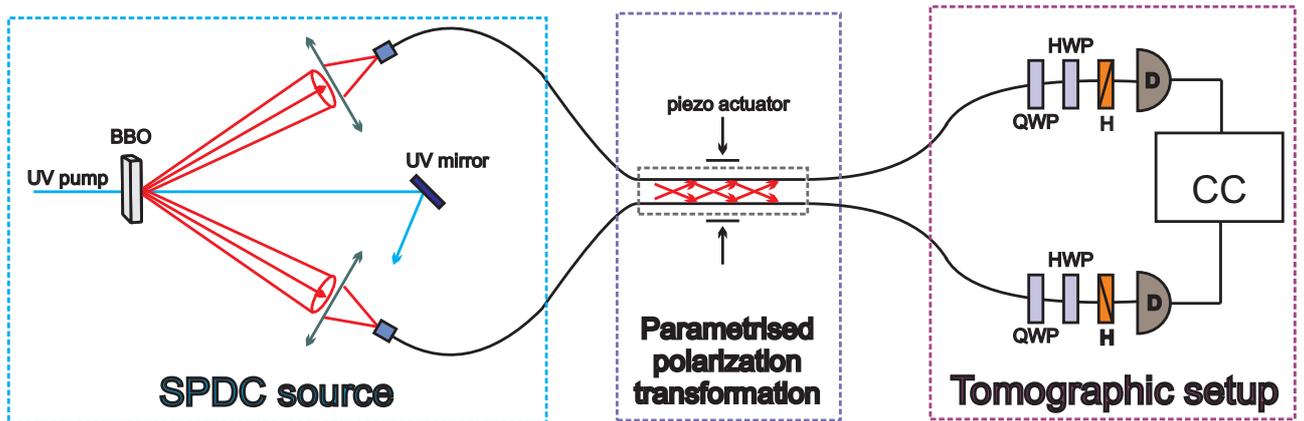


Рис. 19: Схема экспериментальной установки для наблюдения неабелевой геометрической фазы.

ются с помощью механического воздействия на волокно, осуществляемого пьезоэлектрическим актуатором. Очевидно, что независимое изменение параметров такого устройства сопряжено со значительными техническими сложностями, однако представляется возможным провести "калибровку" светоделителя для различных приложенных усилий и различных ориентаций актуатора относительно волокна и определить соответствующие параметры с помощью классической поляриметрии. Преобразованное состояние направляется в томографическую схему, аналогичную описанной в главе 5. Используемые преобразователи поляризации (четверть- и полуволновые пластинки) также могут быть реализованы непосредственно с помощью волоконной оптики.

Следует отметить отличие нашего подхода от использованного авторами работы [25]. Мы использовали разработанный авторами формализм, но в нашем случае параметр траектории s соответствует времени реальной эволюции волнового пакета при прохождении им оптического тракта, в то время как в оригинальной работе под ним подразумевается некото-

рая абстрактная величина, параметризирующая непрерывно изменяемые параметры интерферометра Маха-Цандера, с помощью которого реализуются нелокальные преобразования. Наш подход позволяет говорить о набеге неабелевой фазы как о реальном явлении, возникающем при эволюции поляризационных состояний бифотонного поля, происходящим во времени с *каждой* парой фотонов независимо. В то время, как использованная авторами оригинальной работы концепция *псевдвремени*, делает ее лишь о математической характеристикой ансамбля состояний различных пар, подвергающихся разным, параметризованным псевдвременем s , преобразованиям по-отдельности. Представляется, что предложенная реализация параметризованных нелокальных преобразований с помощью волоконно-оптических светоделителей позволит сделать неабелеву геометрическую фазу экспериментально наблюдаемым эффектом.

8 Заключение и выводы

В работе рассмотрены методы приготовления произвольных состояний поляризационных куквартов и возможности их применения в детерминистических протоколах квантового распределения ключа. Хотелось бы подчеркнуть, что предложенные методы позволяют приготавливать любое, наперед заданное состояние кукварта, что насколько нам известно, до сих пор не было реализовано. Рассматриваемые схемы используют бифотоны невырожденные по частоте, в отличие от большинства известных автору предложений, основывающихся на использовании неколлинеарного режима СПР и пространственных мод. Предложенный подход имеет ряд преимуществ, основным среди которых является возможность формирования

коллимированного пучка, что безусловно является желательным с точки зрения возможных практических применений.

В заключительной части работы рассмотрена физическая ситуация, реализующая непрерывно параметризованные поляризационные преобразования в системе двух фотонов. Показано, что такие преобразования обладают особыми свойствами "геометрического" характера, которые могут быть интерпретированы как проявления неабелевой геометрической фазы.

В качестве основных выводов можно привести следующие положения:

1. Предложено две экспериментальные схемы для приготовления произвольных состояний поляризационных куквартов.

2. Экспериментально продемонстрирована возможность генерации в одной из предложенных схем определенного класса факторизованных состояний куквартов, достаточного, например, для реализации детерминистического протокола квантового распределения ключа.

3. Исследована возможность приготовления в предложенной схеме перепутанных состояний куквартов, получены экспериментальные результаты по двухфотонной интерференции и предложены методы улучшения ее видности, не требующие использования узкополосных частотных фильтров.

4. Предложена реалистичная экспериментальная схема для наблюдения эффектов, связанных с проявлениями неабелевой геометрической фазы при поляризационных преобразованиях бифотонов.

Список литературы

- [1] R. Thew, A. Acin, H. Zbinden, N. Gisin, Experimental realization of entangled qutrits for quantum communication, *Quantum Information and*

Computation, vol.4, No.2, 093-101 (2004).

- [2] Hugues de Riedmatten, Ivan Marcikic, Valerio Scarani, Wolfgang Tittel, Hugo Zbinden, and Nicolas Gisin, Tailoring photonic entanglement in high-dimensional Hilbert spaces, *Phys.Rev.A*, **69**, 050304 (2004).
- [3] Damien Stucki, Hugo Zbinden, Nicolas Gisin , A Fabry–Perot-like two-photon interferometer for high-dimensional time-bin entanglement, *Journal of Modern Optics*, **52**, 2637 (2005).
- [4] Alipasha Vaziri, Gregor Weihs, and Anton Zeilinger, Experimental Two-Photon, Three-Dimensional Entanglement for Quantum Communication, *Phys.Rev.Lett.*, **89**, 240401 (2002).
- [5] Alipasha Vaziri, Jian-Wei Pan, Thomas Jennewein, Gregor Weihs, and Anton Zeilinger, Concentration of Higher Dimensional Entanglement: Qutrits of Photon Orbital Angular Momentum, *Phys.Rev.Lett.*, **91**, 227902 (2003).
- [6] Gabriel Molina-Terriza, Juan P. Torres, and Lluís Torner, Management of the Angular Momentum of Light: Preparation of Photons in Multidimensional Vector States of Angular Momentum, *Phys.Rev.Lett.*, **88**, 013601 (2002).
- [7] Leonardo Neves, G. Lima, J. G. Aguirre Gómez, C. H. Monken, C. Saavedra, and S. Pádua, Generation of Entangled States of Qudits using Twin Photons, *Phys.Rev.Lett.*, **94**, 100501 (2005).

- [8] Malcolm N. O’Sullivan-Hale, Irfan Ali Khan, Robert W. Boyd, and John C. Howell, Pixel Entanglement: Experimental Realization of Optically Entangled $d = 3$ and $d = 6$ Qudits, *Phys.Rev.Lett.*, **94**, 220501 (2005).
- [9] M.V. Fedorov, M. A. Efremov, P. A. Volkov, E.V. Moreva, S. S. Straupe and S. P. Kulik, Anisotropically and High Entanglement of Biphoton States Generated in Spontaneous Parametric Down-Conversion, *Phys.Rev.Lett.*, **99**, 063901 (2007).
- [10] Yu. I. Bogdanov, M.V. Chekhova, S. P. Kulik, G. A. Maslennikov, A. A. Zhukov, C. H. Oh and M. K. Tey, Qutrit State Engineering with Biphotons, *Phys.Rev.Lett.*, **93**, 230503 (2004).
- [11] Daniel F. V. James, Paul G. Kwiat, William J. Munro, and Andrew G. White, Measurement of qubits, *Phys.Rev.A.*, **64**, 052312 (2001).
- [12] G. M. D’Ariano, P. Mataloni, and M. F. Sacchi, Generating qudits with $d = 3, 4$ encoded on two-photon states, *Phys.Rev.A.*, **71**, 062337 (2005).
- [13] Giuseppe Vallone, Enrico Pomarico, Francesco De Martini, and Paolo Mataloni, Experimental realization of polarization qutrits from nonmaximally entangled states, *Phys.Rev.A.*, **76**, 012319 (2007).
- [14] E.V. Moreva, G. A. Maslennikov, S. S. Straupe and S. P. Kulik, Realization of Four-Level Qudits Using Biphotons, *Phys.Rev.Lett.*, **97**, 023602 (2006).
- [15] Yu. I. Bogdanov, E. V. Moreva, G. A. Maslennikov, R. F. Galeev, S. S. Straupe, and S. P. Kulik, Polarization states of four-dimensional systems based on biphotons, *Phys.Rev.A.*, **73**, 063810 (2006).

- [16] Helle Bechmann-Pasquinucci and Asher Peres, Quantum Cryptography with 3-State Systems, *Phys.Rev.Lett.*, **85**, 3313 (2000).
- [17] H. Bechmann-Pasquinucci and W. Tittel, Quantum cryptography using larger alphabets, *Phys.Rev.A.*, **61**, 062308 (2000).
- [18] Mohamed Bourennane, Anders Karlsson, and Gunnar Bjork, Quantum key distribution using multilevel encoding, *Phys.Rev.A.*, **64**, 012306 (2001).
- [19] Marco Lucamarini and Stefano Mancini, Secure Deterministic Communication without Entanglement, *Phys.Rev.Lett.*, **94**, 140501 (2005).
- [20] J.S. Shaari, M. Lucamarini, M.R.B. Wahiddin, Deterministic six states protocol for quantum communication, *Phys.Lett.A*, **358**, 85-90 (2006).
- [21] A. V. Burlakov, M. V. Chekhova, D. N. Klyshko, S. P. Kulik, A. N. Penin, Y. H. Shih, and D. V. Strekalov, Interference effects in spontaneous two-photon parametric scattering from two macroscopic regions, *Phys.Rev.A*, **56**, 3214 (1997).
- [22] Giorgio Brida, Maria Chekhova, Marco Genovese, and Leonid Krivitsky, Generation of different Bell states within the spontaneous parametric down-conversion phase-matching bandwidth, *Phys.Rev.A*, **76**, 053807 (2007).
- [23] М.В.Чехова, Двухфотонный спектрон, *Письма в ЖЭТФ*, том 75, вып.5, с.271-272 (2002).

- [24] F.Wilczek, A.Zee, Appearance of Gauge Structure in Simple Dynamical Systems, *Phys.Rev.Lett.*, **52**, 2111, (1984).
- [25] K.-P.Marzlin, S.D.Bartlett, B.C.Sanders, Entanglement gauge and the non-Abelian geometric phase with two photonic qubits, *Phys.Rev.A*, **67**, 022316, (2003).
- [26] J.D.Franson, B.C.Jacobs, and T.B.Pittman, Quantum computing using single photons and the Zeno effect, *Phys.Rev.A*, **70**, 062302, (2004).