

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени
М. В. ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ

АДАПТИВНАЯ БАЙЕСОВСКАЯ ТОМОГРАФИЯ СОСТОЯНИЙ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ КУКВАРТОВ

Дипломная работа
студента 627 группы
Стручалина Г. И.

Зав. кафедрой
квантовой электроники,
д. ф.-м. н., профессор В. И. Панов.

Научный руководитель:
к. ф.-м. н. С. С. Страупе.

Москва, 2014

Содержание

1	Введение	2
2	Основные понятия	2
3	Обзор литературы	5
3.1	Методы обработки данных	5
3.2	Оптимальная точность восстановления	8
3.3	Статические протоколы	9
3.4	Адаптивные протоколы	15
3.5	Приготовление перепутанных пар поляризационных кубитов	17
4	Постановка задачи	22
5	Теория	22
5.1	Описание метода томографии	22
5.2	Априорное распределение	25
5.3	Генерация случайных блужданий	27
5.4	Блочные измерения	34
6	Эксперимент	37
6.1	Описание установки	37
6.2	Калибровка эффективностей детектирования	40
6.3	Факторы, влияющие на чистоту приготавливаемого состояния	43
7	Результаты	46
8	Выводы	53

1 Введение

Данная работа посвящена экспериментальной реализации протокола адаптивной байесовской томографии, предложенного в работе [1], и продолжает курсовую работу пятого курса. Алгоритм позволяет томографировать состояния высокой размерности. Экспериментальная реализация проведена для четырёхмерных систем (куквартов). В качестве кукварта выступает поляризационное состояние пары фотонов, генерируемых в процессе спонтанного параметрического рассеяния (СПР) на двух нелинейных кристаллах со взаимно перпендикулярными осями.

При расширении имеющейся по результатам курсовой работы четвёртого курса реализации протокола для двумерного случая на случай произвольной размерности возникли некоторые трудности. Решение данных проблем приведено в теоретическом разделе настоящей работы. Там же для целостности изложения дано описание общей схемы рассматриваемого метода томографии.

2 Основные понятия

Пространство состояний составной квантовой системы даётся тензорным произведением пространств состояний входящих в неё частей. Пусть имеется n систем, и состояние каждой из них задаётся вектором $|\psi_i\rangle$, тогда состояние $|\Psi\rangle$ составной системы запишется как

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_n\rangle. \quad (1)$$

Обозначим V, W – векторные пространства размерности n и m соответственно, заданные над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть $|v\rangle, |w\rangle$ – произвольные векторы в пространствах V и W , A и B – линейные операторы, действующие соответственно в V и W . Тогда по определению тензорное произведение линейно относительно умножения на константу

$$\forall z \in \mathbb{C} : z(|v\rangle \otimes |w\rangle) = (z|v\rangle) \otimes |w\rangle = |v\rangle \otimes (z|w\rangle), \quad (2)$$

а также дистрибутивно слева и справа с сохранением порядка сомножителей.

Тензорное произведение линейных операторов $A \otimes B$ задаёт линейный оператор, действующий в пространстве $V \otimes W$, по следующему правилу:

$$(A \otimes B)(|v\rangle \otimes |w\rangle) = A|v\rangle \otimes B|w\rangle. \quad (3)$$

Скалярное произведение в составном пространстве $V \otimes W$ наследует структуру скалярного произведения слагающих его пространств:

$$\left(\sum_i a_i |v_i\rangle \otimes |w_i\rangle, \sum_j b_j |v'_j\rangle \otimes |w'_j\rangle \right) = \sum_{ij} a_i^* b_j \langle v_i | v'_j \rangle \langle w_i | w'_j \rangle. \quad (4)$$

Если $|i\rangle$ и $|j\rangle$ – базисы в пространствах V и W соответственно, то всевозможные комбинации $|i\rangle \otimes |j\rangle$ образуют базис составной системы $V \otimes W$. Для простоты записи примем равнозначные обозначения: $|i\rangle \otimes |j\rangle \equiv |i\rangle_V |j\rangle_W \equiv |ij\rangle$.

При выборе конкретных базисов в пространстве состояний каждой подсистемы операторам A и B будут соответствовать матрицы $n \times n$ A_{ij} и $m \times m$ B_{rs} , а оператор $A \otimes B$ будет представлен блочной матрицей вида:

$$\begin{pmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}B & A_{n2}B & \cdots & A_{nn}B \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Такое умножение матриц справедливо не только для квадратных, но и для любых прямоугольных матриц, и называется кронекеровым произведением.

Приведённый в начале раздела постулат о пространстве состояний составной системы справедлив помимо чистых состояний, описываемых вектором состояния, также и для смешанных – задаваемых оператором (матрицей) плотности. Естественно задаться следующим вопросом: предположим, что имеются две квантовые системы, и состояние составной системы описывается оператором плотности ρ_{12} ; каким будет состояние каждой подсистемы в отдельности? Ответом служит редуцированный оператор плотности, получаемый в результате операции взятия частичного следа. Например, оператор плотности первой подсистемы задаётся выражением

$$\rho_1 \equiv \text{Tr}_2(\rho_{12}), \quad (6)$$

где Tr_2 – частичный след по второй системе, определяемый соотношением

$$\text{Tr}_2(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) = |a_1\rangle\langle a_2| \text{Tr}(|b_1\rangle\langle b_2|) = |a_1\rangle\langle a_2| \langle b_2 | b_1 \rangle, \quad (7)$$

где Tr – уже операция взятия обычного следа. Приведённое определение нужно дополнить линейностью частичного следа по своему аргументу. Использование именно частичного следа для получения состояния подсистемы обосновывается тем, что эта операция является единственной, приводящей к правильной статистике измерений, выполняемых над рассматриваемой подсистемой (подробнее см. [2, подразд. 2.4.3]).

Для дальнейшего нам пригодится теорема о разложении Шмидта и тесно связанная с ним процедура расширения до чистого состояния.

Теорема о разложении Шмидта формулируется следующим образом. Пусть H_1 и H_2 – пространства состояний двух систем, имеющих размерности N_1 и N_2 соответственно, а $|\psi\rangle$ – чистое состояние составной системы $H_1 \otimes H_2$, тогда существуют такие ортонормированные базисы каждой подсистемы $|i\rangle_1$ и $|i\rangle_2$, называемые базами Шмидта, что

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^M \lambda_i |i\rangle_1 |i\rangle_2, \quad (8)$$

где $M = \min(N_1, N_2)$, λ_i – коэффициенты Шмидта, удовлетворяющие условиям $\lambda_i \geq 0$ и $\sum_i \lambda_i^2 = 1$. Подчеркнём, что число слагаемых в разложении не превышает размерности каждой подсистемы, что отличается от простого разложения по базису $|i\rangle_1 |j\rangle_2$, содержащего $M = N_1 N_2$ членов. Количество ненулевых значений λ_i называется рангом Шмидта Λ (Schmidt rank). Числом Шмидта называется сумма вида $\sum_i 1/\lambda_i^4$.

Состояния, которые представимы в виде тензорного произведения состояний подсистем, называются факторизованными состояниями, в противном случае перепутанными (entangled). Имеет место следующее утверждение [2]: состояние является факторизованным тогда и только тогда, когда его ранг Шмидта равен 1.

Нетрудно найти матрицы плотности каждой подсистемы для состояния (8), образуя диаду $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ и беря от неё частичный след: $\rho_{1,2} = \sum_i \lambda_i^2 |i\rangle_{1,2}\langle i|_{1,2}$. Отсюда видно, что собственные значения матриц ρ_1 и ρ_2 равны между собой.

Теперь рассмотрим процедуру расширения до чистого состояния. Предположим, что задано состояние ρ_A системы A и требуется найти чистое состояние $|AB\rangle$ системы AB , такое, что $\rho_A = \text{Tr}_B(|AB\rangle\langle AB|)$. Пусть вспомогательная система B имеет такое же пространство состояний как и основная, тогда искомое состояние запишется в виде:

$$|AB\rangle = \sum_{i=1}^{\Lambda} \sqrt{p_i} |\varphi_i\rangle_A |i\rangle_B, \quad (9)$$

где p_i , $|\varphi_i\rangle$ – собственные значения и собственные вектора матрицы ρ_A , $|i\rangle_B$ – ортонормированный базис в B . Непосредственным вычислением нетрудно проверить, что (9) даёт решение поставленной задачи.

Связь с разложением Шмидта проявляется в том, что выражение (9) представляет собой не что иное, как разложение Шмидта (8) с коэффициентами $\lambda_i = \sqrt{p_i}$.

Отметим, что расширение до чистого состояния не единственно: выбирая другой ортонормированный базис $|i'\rangle_B$, также получим правильное расширение.

3 Обзор литературы

Квантовая томография – процедура определения неизвестного квантового состояния, включающая в себя набор измерений и метод обработки полученных данных¹. Протоколы квантовой томографии можно разделить на статические и адаптивные. В статических процедурах набор измерений задан заранее и остаётся неизменным, а в адаптивных накопленные результаты влияют на выбор следующего измерения.

3.1 Методы обработки данных

Томографическая реконструкция. Наиболее прямолинейным методом обработки измеренных данных является так называемая томографическая реконструкция. Правило Борна гласит, что вероятность $p_{\alpha\gamma}$ наблюдения исхода γ при измерении α (определяемом конфигурацией экспериментальной установки, например, положением углов фазовых пластинок) над состоянием ρ равняется

$$p_{\alpha\gamma} = \mathbb{P}(\gamma|\alpha, \rho) = \text{Tr}(M_{\alpha\gamma}\rho), \quad (10)$$

где $M_{\alpha\gamma}$ – POVM элемент измерения² (например, проектор на состояние $|\alpha\gamma\rangle$: $M_{\alpha\gamma} = |\alpha\gamma\rangle\langle\alpha\gamma|$). При томографической реконструкции вероятность $p_{\alpha\gamma}$ заменяется на наблюдаемую частоту исхода $n_{\alpha\gamma}$. Таким образом выражение (10) переходит в систему линейных уравнений для различных α, γ относительно неизвестных матричных элементов ρ , которая затем решается. Достоинством метода является, несомненно, его простота. Основной недостаток процедуры заключается в том, что зачастую (при-

¹Довольно часто под протоколом томографии подразумевается лишь набор измерений безотносительно к методу их обработки. Мы так же будем использовать это значение. Существует ещё третий смысл фразы «процедура томографии» (см., например, [3, 4]), всё реже встречающийся в настоящее время. Имеется в виду томографическая реконструкция (tomographic reconstruction) – метод обработки измеренных данных, основанный на обращении правила Борна (подробнее см. далее по тексту). Однако, такое значение термина очень узкое и не согласуется со современным смыслом.

²Сокр. от Positive Operator-Valued Measure. В русской литературе используются термины: разложение единицы, положительная операторно-значная мера.

близительно в 3/4 случаев [3]) при томографии близких к чистым состояний, матрица плотности обладает отрицательными собственными значениями, что нарушает условие положительной определённости.

Метод максимального правдоподобия. Следующим этапом стало применение к задаче квантовой томографии метода максимального правдоподобия, устраняющего упомянутое выше несовершенство прямой реконструкции [5]. Данный подход весьма распространён в литературе (см., например, [3, 6, 7, 8]). Суть метода в том, что сначала необходимо определить функцию правдоподобия $\mathcal{L}(\rho, \mathcal{D})$, зависящую от набора измеренных данных $\mathcal{D}$, которая задаёт вероятность того, что наблюдаемая статистика измерений $\mathcal{D}$ соответствует состоянию ρ :

$$\mathcal{L}(\rho, \mathcal{D}_N) = \mathbb{P}(\mathcal{D}_N | \rho) = \prod_{n=1}^N \mathbb{P}(\gamma_n | \rho, \alpha_n), \quad (11)$$

где n – номер измерения, N – полное число измерений в $\mathcal{D}_N$, γ_n – результат измерения на шаге n , α_n – конфигурация экспериментальной установки на шаге n . Далее находится матрица плотности, максимизирующая функцию правдоподобия. Проблема отрицательных собственных значений решается тем, что поиск максимума уже изначально ведётся на множестве физически разрешённых матриц плотности (эрмитовых, обладающих единичным следом и положительно определённых). Однако, метод максимального правдоподобия не лишён недостатков [4]. Например, найденная матрица плотности может иметь неполный ранг, то есть некоторые её собственные значения в точности равны нулю. Отсюда приходим к выводу, что в ансамбле систем, описываемых такой вырожденной матрицей плотности, состояние с нулевым собственным значением имеет нулевую вероятность, то есть никогда не наблюдается. Но на основе конечного числа измерений нельзя достоверно утверждать, что какое-либо событие невозможно, следовательно, получаем противоречие.

Проблема возникновения состояния ρ_{MLE} с неполным рангом в методе максимального правдоподобия связана с получением томографически реконструированной матрицы ρ_{tomo} с отрицательными собственными значениями. В работе [4] показано, что глобальный максимум $\mathcal{L}(\rho, \mathcal{D}_N)$, найденный без требования положительной определённости, достигается на ρ_{tomo} . Так как ρ_{tomo} не лежит в области разрешённых состояний, то условный максимум достигается на границе этой области – множестве состояний неполного ранга.

Байесовский подход. Для байесовских методов характерно использование распределения вероятностей $p(\rho)$, которое определяет вероятность того, что томографируемое состояние является данным ρ . На начальном этапе задаётся априорное распределение вероятностей $p(\rho)$, которое должно быть в некотором смысле не информативным. После получения совокупности результатов измерений $\mathcal{D}_N$ апостериорное распределение $p(\rho|\mathcal{D}_N)$ вычисляется по формуле Байеса:

$$p(\rho|\mathcal{D}_N) = \mathcal{L}(\rho, \mathcal{D}_N)p(\rho)/p(\mathcal{D}_N), \quad (12)$$

где $\mathcal{L}(\rho, \mathcal{D}_N)$ – как и прежде, функция правдоподобия, а $p(\mathcal{D}_N)$ – нормировочная константа.

В работах [4, 9] исследуются особенности байесовского подхода и свойства получаемых с его помощью оценок томографируемого состояния. Байесовское распределение наиболее точно передаёт наше знание о томографируемом состоянии по прошествии серии из N измерений. Хорошей оценкой истинного состояния является среднее по распределению:

$$\hat{\rho} = \mathbb{E}_{p(\rho|\mathcal{D}_N)}[\rho]. \quad (13)$$

Показано, что матрица плотности $\hat{\rho}$ обладает полным рангом для подавляющего большинства априорных распределений. В частности это справедливо для распределений, чья плотность вероятности не обращается в ноль на гладкой поверхности, по крайней мере имеющей вещественную размерность $(D - 1)^2$ (в то время как всё пространство характеризуется $D^2 - 1$ вещественными параметрами).

Также оценка (13) является оптимальной оценкой в том смысле, что в среднем по априорному распределению она даёт наилучшую точность восстановления истинного состояния, если точность восстановления считать с помощью класса мер, названных автором операциональными расходимостями (operational divergences). Оптимальность достигается не только в пределе большого количества измерений N , но и для любого конечного их числа. Операциональные расходимости включают в себя такие распространённые меры, как: квадрат расстояния Гильберта – Шмидта

$$d_{HS}^2(\rho, \hat{\rho}) = \text{Tr}[(\rho - \hat{\rho})^2], \quad (14)$$

а также относительную энтропию или расходимость Кульбака – Лейблера (Kullback – Leibler divergence)

$$d_{KL}(\rho, \hat{\rho}) = \text{Tr}[\rho(\log \rho - \log \hat{\rho})]. \quad (15)$$

Тем не менее операциональные расходимости не содержат метрик, основанных на степени совпадения (fidelity) [10]:

$$F(\rho, \hat{\rho}) = \left(\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho} \hat{\rho} \sqrt{\rho}} \right)^2. \quad (16)$$

Погрешность восстановления состояния можно оценить, как средний размер распределения $\bar{d}$:

$$\bar{d} = \sqrt{\mathbb{E}_{p(\rho|\mathcal{D})}[d^2(\rho, \hat{\rho})]}, \quad (17)$$

где $d(\rho, \hat{\rho})$ – некоторая мера близости двух состояний ρ и $\hat{\rho}$.

Несмотря на преимущества байесовского подхода, он менее распространён в литературе по сравнению с методом максимального правдоподобия. В частности это объясняется более трудоёмкой реализацией и вычислительной сложностью, так как, например, выражения (13) и (17) подразумевают интегрирование в многомерном пространстве матриц плотности (уже для куквартов вещественная размерность Гильбертова пространства равна $4^2 - 1 = 15$). Обычно для практических расчётов прибегают к алгоритмам из семейства методов Монте – Карло. Тем не менее на основе байесовского подхода довольно часто строятся адаптивные схемы измерений [1, 11, 12, 13] (см. также [14]).

3.2 Оптимальная точность восстановления

Квантовое измерение изменяет исходное состояние, а результат наблюдения носит вероятностный характер, поэтому для получения удовлетворительной точности восстановления квантового состояния необходимо многократно повторить процесс измерения над частицами в одном и том же состоянии. Формально имеется N частиц в состоянии ρ , а состояние совокупности всех частиц даётся тензорным произведением $\rho^{\otimes N}$. Предположим, что каждая частица составная и содержит две подсистемы A и B . В зависимости от типа измерений, производимых над такой группой частиц, разделим протоколы томографии на:

1. коллективные и сепарабельные (collective and separable),
2. перепутанные и факторизованные (entangled and factorized).

Коллективные протоколы предполагают однократное измерение самого общего вида над всей совокупностью N частиц. Такие схемы на настоящий момент невозможно экспериментально реализовать, так как обычно $N \gg 1$. Данные протоколы

представляют теоретический интерес, ибо с их помощью возможно достичь наилучшей точности восстановления. Они дают ту опорную точку, с которой можно сравнить качество остальных протоколов. В сепарабельных протоколах производится N измерений над каждой частицей в отдельности. Если же ещё провести измерения только над отдельными подсистемами составной частицы, то получим факторизованный протокол, в противном случае перепутанный. Интересен вопрос о том, как тип измерения влияет на максимально достижимую точность восстановления.

В работе [15] данный вопрос рассмотрен в приложении к томографии чистых состояний кубитов. Показано, что для оптимального коллективного протокола асимптотическая скорость сходимости степени совпадения равняется $1 - F(N) = \frac{1}{N+2}$.

Максимально достижимая точность восстановления для коллективных протоколов лучше, чем для сепарабельных [16]. Обозначим за ρ истинное состояние, а за ρ_χ состояние, восстановленное на основе результатов эксперимента χ . Для степени совпадения, усреднённой по результатам, $\langle F \rangle = \langle F(\rho, \rho_\chi) \rangle_\chi$ имеет место соотношение:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N(1 - \langle F_{sep} \rangle) \geq D_{real}^2/4 > \lim_{N \rightarrow \infty} N(1 - \langle F_{col} \rangle), \quad (18)$$

где F_{sep} , F_{col} – степень совпадения для сепарабельных и коллективных протоколов соответственно, а D_{real} – действительная размерность пространства состояний. В оригинальной работе рассмотрение велось на примере восстановления смешанного состояния кубита ($D_{real} = 3$) и томографии состояний, лежащих в экваториальной плоскости шара Блоха ($D_{real} = 2$)³.

3.3 Статические протоколы

С математической точки зрения измерения общего вида описываются набором POVM-элементов $\{M_i\}$. POVM-элементы являются положительно определёнными операторами ($M_i > 0$) и образуют разложение единицы ($\sum_i M_i = 1$). В эксперименте зачастую используются проекционные измерения, в которых все POVM-элементы представляют собой проекторы на некие вектора $|i\rangle$: $M_i = |i\rangle\langle i|$. Однако, это не умаляет общности: имея возможность осуществлять произвольные унитарные пре-

³Однако, нам представляется, что приведённые авторами рассуждения, в силу своей общности, должны быть справедливы и в многомерном случае $D_{real} > 3$. Но это противоречит результатам моделирования протокола адаптивной байесовской томографии куквартов. Согласно (18) асимптотическое значение $1 - F \geq 15^2/4N = 56.25/N$, а аппроксимация данных симуляций даёт $1 - F \approx 33/N$.

образования над состоянием и выполнять проективные измерения, можно проводить измерения общего вида (доказательство см. [2, подразд. 2.2.8]).

В работе [3] предложена схема статической томографии состояния k кубитов. Проведём рассмотрение для случая куквартов. Разложим матрицу плотности по базису $\{\Gamma_\nu\}$ ($\text{Tr}(\Gamma_\nu \Gamma_\mu) = \delta_{\nu\mu}$):

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_{\nu=1}^{16} \Gamma_\nu r_\nu, \\ r_\nu &= \text{Tr}(\Gamma_\nu \rho).\end{aligned}\tag{19}$$

Если в качестве Γ_ν взять комбинации $\sigma_i \otimes \sigma_j (i, j = 0, 1, 2, 3, \sigma_0 = 1)$, то получим многомерный аналог представления матрицы плотности через вектор Блоха. Для определения компонент вектора Блоха r_ν проведём проекционные измерения на некий набор из 16 состояний $\{|\psi_\nu\rangle\}$. Среднее количество отсчётов n_ν в этих измерениях равняется

$$n_\nu = \mathcal{N} \langle \psi_\nu | \rho | \psi_\nu \rangle,\tag{20}$$

где $\mathcal{N}$ – константа, зависящая от эффективности детектирования и общей интенсивности сигнала. Подставив (19) в (20), найдём:

$$n_\nu = \mathcal{N} \sum_{\mu=1}^{16} B_{\nu\mu} r_\mu,\tag{21}$$

где элементы матрицы B размером 16×16 даются выражением:

$$B_{\nu\mu} = \langle \psi_\nu | \Gamma_\mu | \psi_\nu \rangle.\tag{22}$$

Отсюда сразу же следует необходимое и достаточное условие полноты набора $\{|\psi_\nu\rangle\}$: матрица B должна быть невырожденной. Если данное условие выполнено, то возможно обратить соотношение (21) и провести томографическую реконструкцию параметров r_ν .

В рассматриваемой работе экспериментальная проверка проведена для куквартов, реализованных на поляризационных степенях свободы пары фотонов, рождающихся в процессе спонтанного параметрического рассеяния (СПР). Набор измерений $\{|\psi_\nu\rangle\}$ состоял из 16 факторизованных векторов, которые были составлены из однокубитовых состояний $|H\rangle, |V\rangle, |D\rangle = (|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}, |R\rangle = (|H\rangle + i|V\rangle)/\sqrt{2}, |L\rangle = (|H\rangle - i|V\rangle)/\sqrt{2}$.

Представлены результаты восстановления белловского состояния $|\psi\rangle = (|HH\rangle + |VV\rangle)/\sqrt{2}$. Сравнивались две процедуры обработки наблюдаемых результатов: томографическая реконструкция и метод максимального правдоподобия. Собственные значения томографически реконструированной матрицы оказались равными $\lambda = \{1.022, 0.068, -0.065, -0.024\}$ ($\text{Tr } \rho^2 = 1.053$). Как видно, два из них отрицательны. Чтобы удовлетворить требованию положительной определённости в методе максимального правдоподобия использовалась подстановка:

$$\rho = \frac{T^\dagger T}{\text{Tr } T^\dagger T}, \quad (23)$$

где матрица T имела нижнетреугольный вид (все элементы выше главной диагонали равны нулю). Матрица плотности, найденная этим способом, имела собственные значения, два из которых в точности равны нулю: $\lambda = \{0.986, 0.014, 0, 0\}$ ($\text{Tr } \rho^2 = 0.972$). Здесь мы находим подтверждение ранее упомянутому факту: метод максимального правдоподобия выдаёт состояния неполного ранга, если томографически реконструированная матрица не является положительно определённой. Также в работе проведён анализ ошибок, связанных с пуассоновской статистикой отсчётов и погрешностью в установке углов фазовых пластинок.

Взаимно несмещённые базисы. Понятие о взаимно несмещённых базисах (mutually unbiased bases – MUB) введено в работе [17]. Дадим определение: базисы $\{|e_i^{(j)}\rangle\}_{i=1,\dots,D}$, где $j = 1, \dots, J$ – индекс нумерующий базисы, D – размерность Гильбертова пространства, называются взаимно несмещёнными, если выполняется соотношение

$$\forall j \neq j', \forall i, i' : |\langle e_i^{(j)} | e_{i'}^{(j')} \rangle|^2 = \frac{1}{D}. \quad (24)$$

Определение допускает следующую интерпретацию: если состояние системы совпадает с одним из ортов базиса, то результаты проекционных измерений на состояния любого другого базиса возникают с одинаковой вероятностью.

Число взаимно несмещённых базисов, необходимое для однозначного восстановления матрицы плотности, равно $D + 1$. Действительно, матрица плотности D -мерной квантовой системы характеризуется $D^2 - 1$ вещественными параметрами; каждый базис содержит D векторов, что даёт $D - 1$ независимую вероятность исхода эксперимента. Таким образом число базисов равно $(D^2 - 1)/(D - 1) = D + 1$.

Взаимно несмещённые базисы как бы дополняют друг друга в том смысле, что измерения в одном базисе не дают какой-либо информации об измерениях в дру-

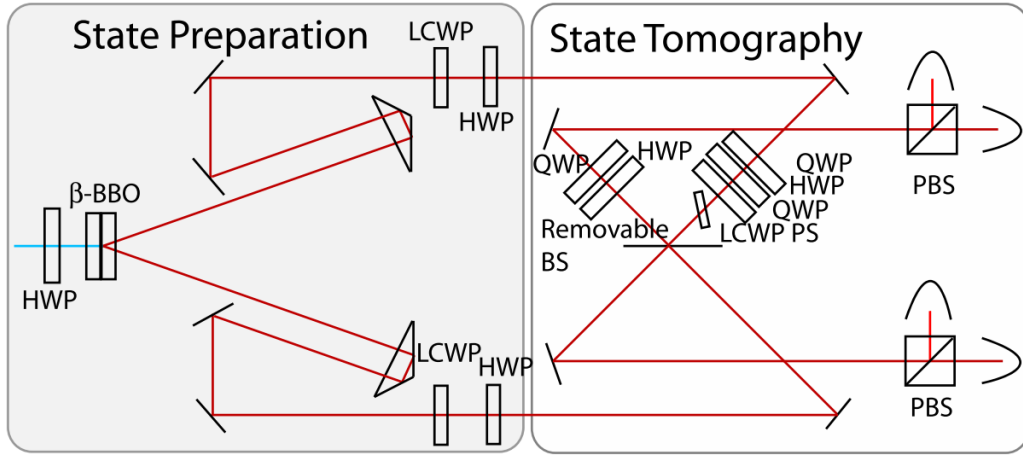


Рис. 1: Схема установки для проведения измерений во взаимно несмещённых базисах над поляризационными куквартами, использованная в работе [18].

гом базисе. Поэтому такие измерения дают максимум информации о системе, и восстановленное состояние получится наиболее точным. Это интуитивное рассуждение обосновано в работе [17]. Показано, что статистическая ошибка восстановленного состояния минимальна при измерениях во взаимно несмещённых базисах. В упомянутой работе авторами показано, что максимальное число базисов не превосходит $D + 1$. Для случая, когда размерность пространства является степенью простого числа, то есть $D = p^m$, где p – некоторое простое число, m – целое, доказано, что достигается граничное значение $D + 1$, также найден метод явного построения взаимно несмещённых базисов. Несколько первых значений D , для которых нарушается условие $D = p^m$: 6, 10, 12, 14, 15

В двумерном Гильбертовом пространстве существует три взаимно несмещённых базиса, которые образованы шестью стандартными состояниями:

$$\{|H\rangle, |V\rangle\}, \quad \{|D\rangle, |A\rangle\}, \quad \{|R\rangle, |L\rangle\}. \quad (25)$$

На сфере Блоха это соответствует векторам, направленным из центра сферы нормально к граням вписанного куба. Мы ещё вернёмся к такой геометрической иллюстрации для случая других правильных многогранников (например, тетраэдра или октаэдра) в конце настоящего раздела.

Взаимно несмещённые базисы в пространствах с размерностью отличной от двух состоят из перепутанных состояний, поэтому проекционные измерения становятся затруднительными с экспериментальной точки зрения. Однако, в работе [18] продемон-

стрирована статическая томография с применением взаимно несмещённых базисов. Схема экспериментальной установки изображена на рис. 1. Пары фотонов рождались в процессе СПР типа-I на двух кристаллах ВВО, вырезанных под неколлинеарный режим с углом вылета 3° . Поворот поляризации накачки позволял изменять степень перепутывания получаемого состояния. Поляризация бифотона управлялась с помощью полуволновых HWP и жидкокристаллических LCWP фазовых пластинок. Внося случайную фазу посредством ЖК пластинок, можно было получить полностью смешанное состояние. Проекция на перепутанное состояние осуществлялась с помощью двухфотонной интерференции на светоделителе BS. При факторизованных измерениях светоделитель убирался.

Таблица 1: Два набора измерений, применяемых в работе [18].

Факторизованный	Взаимно несмещённый
HH, HV, VH, VV	HH, HV, VH, VV
HD, HA, VD, VA	RD, RA, LD, LA
HR, HL, VR, VL	DR, DL, AR, AL
DH, DV, AH, AV	$(RL + iLR)/\sqrt{2}, (RL - iLR)/\sqrt{2}$
DD, DA, AD, AA	$(RR + iLL)/\sqrt{2}, (RR - iLL)/\sqrt{2}$
DR, DL, AR, AL	$(RV + iLH)/\sqrt{2}, (RV - iLH)/\sqrt{2}$
RH, RV, LH, LV	$(RH + iLV)/\sqrt{2}, (RH - iLV)/\sqrt{2}$
RD, RA, LD, LA	
RR, RL, LR, LL	

Измерения во взаимно несмещённых базисах сравнивались со стандартной стратегией, включающей в себя проекции только лишь на факторизованные состояния (см. табл. 1). Восстановление матрицы плотности проводилось методом максимального правдоподобия. Произведена томография нескольких типов состояний: белловского $(|HH\rangle + |VV\rangle)/\sqrt{2}$, факторизованного $|HV\rangle$ и максимально смешанного. Для всех томографируемых состояний приведены зависимости $1 - F(N)$, где F – степень совпадения между восстановленным и «истинным» состояниями, а N – число зарегистрированных совпадений. Все данные зависимости имеют вид, хорошо описываемый степенной функцией β/N^α .

Значение α при факторизованных и MUB измерениях одинаково и близко к $1/2$,

но константы β различаются. Максимальный выигрыш достигается при томографии белловского состояния. Величина $1 - F$ уменьшается в 1.84 ± 0.06 раза, независимо от числа зарегистрированных событий. Для максимально смешанного состояния также наблюдается улучшение качества томографии в 1.49 ± 0.05 раз. И только при восстановлении чистого факторизованного состояния прирост точности практически отсутствует (1.09 ± 0.05). Полученные результаты позволяют говорить, что томография со взаимно несмещёнными базисами не хуже, чем измерения на факторизованные состояния, хотя последние и используют большее число измерений (36 против 20).

Переполненные наборы. Количество измерений в наборе, равное 4^k , при томографии системы, состоящей из k кубитов, является нижней границей. Встаёт задача о том, как качество восстановления изменяется при переходе к «переполненным» наборам, в которых число элементов больше 4^k .

Рассмотрим семейство протоколов, основанное на правильных многогранниках. Для случая кубитов набор измерений изобразится на сфере Блоха векторами, направленными из центра перпендикулярно к граням вписанного многогранника. Каждый многогранник задаёт свой набор векторов. Образовав всевозможные тензорные произведения однокубитовых векторов, получим соответствующие наборы для томографии состояния кукварта. В работе [7] посредством численного моделирования проведено сравнение данных протоколов. Рассмотрены так называемые платоновы тела с числом граней, соответственно: 4 – для тетраэдра, 6 – для куба, 8 – для октаэдра, 12 – для додекаэдра, 20 – для икосаэдра. К этому ряду был добавлен набор $\{H, V, D, R\}$ (назовём его J4) и $\{HH, HV, VV, VH, RH, RV, DV, DH, DR, DD, RD, HD, VD, VL, HL, RL\}$ (J16) из упомянутой ранее работы [3] для томографии состояния одного и пары кубитов соответственно.

Из всех рассмотренных протоколов J4 и J16 обладают минимальной точностью. Имеющие то же количество измерений протоколы, основанные на тетраэдре, являются более предпочтительными. Затем по качеству восстановления идут протоколы, основанные на кубе. Протоколы с большим числом измерений дают на практике лишь незначительное увеличение точности. Эти выводы экспериментально подтверждены в работе [19] для протоколов J4, тетраэдр, куб и V36 на примере восстановления состояний поляризационных кубитов. Протокол V36 включает в себя 36 измерений,

получаемых поворотом лишь одной фазовой пластинки, что ведёт к простоте реализации.

3.4 Адаптивные протоколы

Адаптивная стратегия подразумевает, что следующее измерение зависит от результатов, полученных на предыдущих этапах работы алгоритма. В данном разделе мы ограничимся рассмотрением адаптивных протоколов для кубитов. Однако, это позволяет понять общие закономерности и свойства адаптивных протоколов.

Протокол на основе тетраэдра изначально предложен и детально исследован в работе [6]. Показано, что среди всех протоколов с числом измерений, равным 4, он обладает наибольшей точностью. Для восстановления матрицы плотности по результатам измерений используется метод максимального правдоподобия. Приведённый в статье анализ показывает, что скорость сходимости степени совпадения зависит от ориентации тетраэдра и достигает максимального значения, если один из векторов измерительного базиса сонаправлен с вектором истинного состояния. Поэтому за счёт подстройки тетраэдра под текущую оценку томографируемого состояния, можно добиться улучшения скорости сходимости. Примечательно, что если оценивать точность восстановления в метрике Гильберта – Шмидта, то сходимость алгоритма не зависит от ориентации тетраэдра.

В работе [8] реализована схема адаптивной томографии кубитов, основанная на измерении MUB. Экспериментальная реализация выполнена для поляризационных кубитов. Приведённые рассуждения показывают, что наиболее оптимальное измерение – измерение в собственном базисе истинного состояния. Адаптивность заключается в том, что исходный ансамбль N кубитов разбивается на две части. Первая половина измеряется стандартным статическим методом, а затем измерительный базис выравнивается по текущей оценке томографируемого состояния. Такой алгоритм с одним шагом адаптивности позволяет качественно улучшить скорость сходимости степени совпадения ($1/\sqrt{N} \rightarrow 1/N$). Исследовано влияние экспериментальных погрешностей на результаты томографии. Рассмотрено несколько моделей ошибок, например, при каждом измерении фазовые пластинки случайно отклоняются от требуемых положений или же ошибка установки фазовых пластинок фиксирована во всех измерениях (систематическая погрешность). Продемонстрировано, что состоя-

ние, восстановленное адаптивным методом, менее подвержено влиянию неточностей в экспериментальной установке. Также из-за погрешностей скорость сходимости отличается от идеального случая $1/N$.

На основе работ [6, 8, 13] можно сформулировать следующие выводы:

1. При томографии смешанного состояния и статическая, и адаптивная стратегии ведут себя качественно одинаково. Скорость сходимости $1 - F \propto 1/N$.
2. Преимущества адаптивного подхода наиболее сильно проявляются при восстановлении чистых состояний. В общем случае статическая схема обеспечивает скорость сходимости $\propto 1/\sqrt{N}$, в то время, как для адаптивного метода $\propto 1/N$.
3. Однако, если при томографии чистого состояния априорно пытаться восстанавливать его только как чистое, то для любой стратегии наблюдается высокая скорость сходимости $\propto 1/N$. Проблема не в определении направления собственных векторов, а в различении нулевых и малых собственных значений ($\lambda = 0$ и $\lambda \propto 1/\sqrt{N}$).
4. Для статических протоколов при томографии близких к чистым состояний возможен переход скорости сходимости $1/\sqrt{N} \rightarrow 1/N$, как только установлено, что минимальное собственное значение всё же отлично от нуля, то есть $\lambda_{min} \gtrsim 1/\sqrt{N}$.
5. Если оценивать качество восстановления состояния в метрике Гильберта – Шмидта, то может оказаться, что адаптивный и статический протокол ведут себя качественно одинаково. При использовании степени совпадения этого не возникает, так как она весьма чувствительна к точности определения малых собственных значений.
6. Одни из лучших измерений – измерения в собственном базисе истинного состояния. На практике истинное состояние, естественно, не известно. Хорошей стратегией будет выравнивание измерительного базиса в соответствии с текущей оценкой томографируемого состояния. Даже единичный акт выравнивания позволяет качественно улучшить скорость сходимости ($1/\sqrt{N} \rightarrow 1/N$).
7. Адаптивная процедура менее подвержена влиянию погрешностей эксперимента, связанных, например, с неточностью выставления углов фазовых пласти-

3.5 Приготовление перепутанных пар поляризационных кубитов

Работа с поляризационными степенями свободы фотонов является довольно удобной с экспериментальной точки зрения, ввиду своей простоты, так как, например, для осуществления преобразований достаточно использовать линейные оптические элементы типа фазовых пластинок и поляризационных светоделителей. В то же время поляризационное состояние одного фотона представляет собой кубит – квантовую систему минимальной размерности, из комбинации которых можно образовать системы более высокой размерности. Так, взяв пару фотонов, рождаемых в процессе спонтанного параметрического рассеяния, получим поляризационный кукварта. В общем случае протокол томографии должен быть способным восстанавливать произвольное состояние, поэтому важно уметь приготавливать любое наперёд заданное состояние для проверки алгоритма.

Произвольное чистое состояние кукварта $|\psi\rangle$ имеет вид:

$$|\psi\rangle = c_1|HH\rangle + c_2|HV\rangle + c_3|VH\rangle + c_4|VV\rangle. \quad (26)$$

В процессе СПР типа-I можно получить базисные состояния $|HH\rangle$ или $|VV\rangle$, при СПР типа-II испускаются бифотоны в состояниях $|HV\rangle$ или $|VH\rangle$. На первый взгляд может показаться, что необходимо четыре нелинейных кристалла, каждому из которых соответствует своё базисное состояние. Оказывается, что достаточно использовать два [20] или же вовсе один кристалл [21]. Последняя схема, однако, требует интерферометрической стабильности.

Схема с одним кристаллом. Произвольное чистое состояние кукварта можно получить в два этапа. Сначала генерируется «затравочное» состояние, степень перепутывания которого поддаётся регулировке. Затем с помощью локальных унитарных преобразований, затрагивающих каждый составляющий кубит в отдельности, «затравочное» состояние преобразуется в требуемое.

Пусть имеется «затравочное» состояние вида:

$$|\chi\rangle = x|HH\rangle + \sqrt{1-x^2}|VV\rangle. \quad (27)$$

Требуется найти такие локальные унитарные преобразования U и W , что

$$|\psi\rangle = U \otimes W |\chi\rangle, \quad (28)$$

где $|\psi\rangle$ – желаемое состояние кукварта. Для этого образуем матрицу Ψ , соответствующую состоянию (26):

$$\Psi = c_1|H\rangle\langle H| + c_2|H\rangle\langle V| + c_3|V\rangle\langle H| + c_4|V\rangle\langle V|. \quad (29)$$

Полученная матрица удовлетворяет соотношению:

$$|\psi\rangle = (\Psi \otimes I)(|HH\rangle + |VV\rangle). \quad (30)$$

Подвергнем Ψ разложению по сингулярным числам:

$$\Psi = UDW^\dagger, \quad (31)$$

где U и W – унитарные матрицы, а D – диагональная. Элементы на диагонали называют сингулярными числами. Подставляя разложение (31) в (30), найдём:

$$|\psi\rangle = (U \otimes W)(d_1|HH\rangle + d_2|VV\rangle), \quad (32)$$

что эквивалентно (28). Здесь $d_{1,2}$ – сингулярные числа матрицы Ψ .

Экспериментальная реализация данной методики осуществлена в работе [21]. Схема установки изображена на рис. 2. «Затравочное» состояние получается в результате двойного прохождения нелинейного кристалла ВВО, вырезанного под неколлинеарный частотно-вырожденный синхронизм типа-I. Пусть для определённости накачка имеет вертикальную поляризацию $|V\rangle$. При первом проходе в левую сторону испускается пара фотонов в состоянии $|HH\rangle$, которая затем отражается обратно сферическим зеркалом М. Между зеркалом и кристаллом находится четвертьволновая пластинка $\lambda/4$, которая при двойном прохождении преобразует горизонтальную поляризацию в вертикальную. Излучение накачки, прошедшее через кристалл, также отражается зеркалом, и рождает бифотоны, распространяющиеся вправо. Таким образом, на выходе получаем затравочное состояние (27), которое легко подвергнуть локальным преобразованиям U и W . Величину x можно менять, если перед вторым проходом кристалла, повернуть поляризацию накачки на некий угол посредством пластинки $\lambda_p/4$. Относительная фаза между компонентами $|HH\rangle$ и $|VV\rangle$ определяется положением зеркала по отношению к кристаллу, поэтому для поддержания постоянной фазы требуется интерферометрическая стабильность.

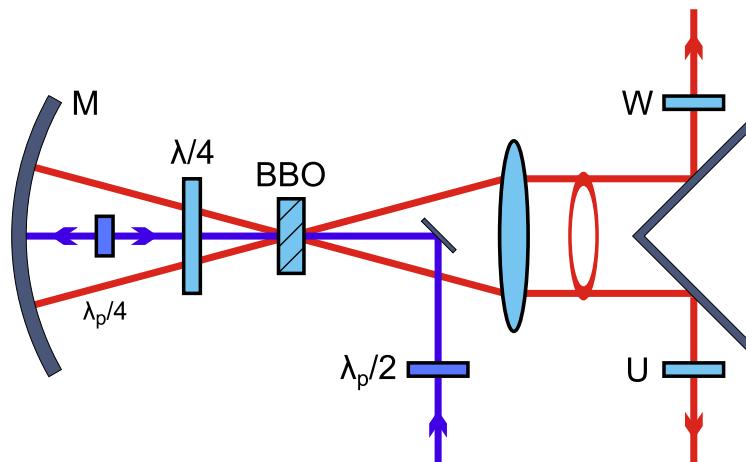


Рис. 2: Схема на основе одного кристалла для приготовления произвольного состояния кварца, предложенная в работе [21].

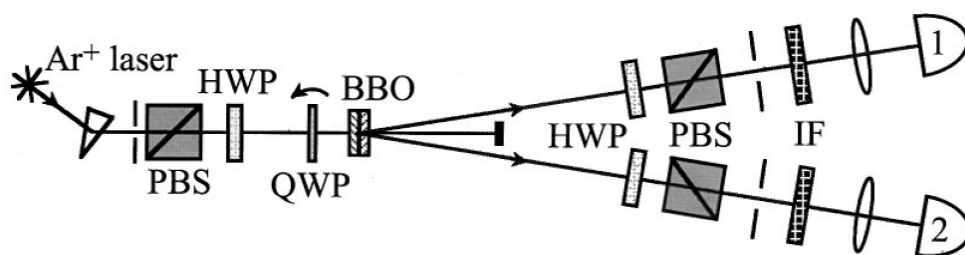


Рис. 3: Схема установки на основе двух кристаллов со взаимно перпендикулярными осями, использованная в работе [20].

Схема с двумя кристаллами. В работе [20] для генерации перепутанных пар кубитов использовался частотно-вырожденный неколлинеарный процесс СПР типа-I в двух кристаллах со взаимно перпендикулярными осями. Схема приготовления состояния изображена на рис. 3. Размеры кристаллов ВВО составляли $8.0 \times 8.0 \times 0.59$ мм. Накачкой служило излучение аргонового лазера с длиной волны 351.1 нм. Поляризация накачки задавалась с помощью поляризационно светоделителя PBS и полуволновой пластинки HWP. Наклоняемая пластинка QWP позволяла управлять разностью фаз между $|H\rangle$ и $|V\rangle$ компонентами. На выходе из кристаллов находилась система регистрации, состоящая из полуволновых пластинок HWP, анализаторов PBS и счётных фотоприёмников, с установленными перед ними двухлинзовыми объективами. Выделение нужных пространственных мод осуществлялось диафрагмами, расположенными на расстоянии около 1 м от кристаллов. Регистрируемая частота фотонов задавалась интерференционными фильтрами с центральной длиной волны 702 нм и шириной на полувысоте 5 нм.

Система из двух близко расположенных кристаллов с перпендикулярными осями работает по следующему принципу. Предположим, что первый кристалл имеет горизонтальную ось, второй, следовательно, вертикальную, а накачка поляризована под углом θ . Тогда в результате СПР типа-I каждый кристалл будет генерировать пары фотонов в состояниях $|HH\rangle$ и $|VV\rangle$ соответственно. Интенсивность генерации бифотонов зависит от интенсивности компоненты накачки, поляризованной вдоль оси кристалла. Если кристаллы достаточно тонкие и близко расположены друг к другу, то это приведёт к тому, что амплитуды бифотонов от первого и второго кристаллов складываются когерентно (при условии, конечно, что длина когерентности накачки много больше расстояния между кристаллами):

$$|\psi\rangle = \cos \theta |HH\rangle + \sin \theta e^{i\varphi} |VV\rangle, \quad (33)$$

где относительная фаза φ зависит от толщин кристаллов, а также от наклона пластинки QWP. Меняя угол поляризации накачки θ , можно получать состояния с разной степенью перепутывания: при $\theta = 0$ – факторизованное, а при $\theta = 45^\circ$ – белловское состояние, обладающее максимальным перепутыванием.

Рассматриваемая схема, помимо степени перепутывания, позволяет управлять чистотой приготавливаемого состояния. Чистота состояния зависит от числа регистрируемых пространственных мод, количество которых можно изменять посредством

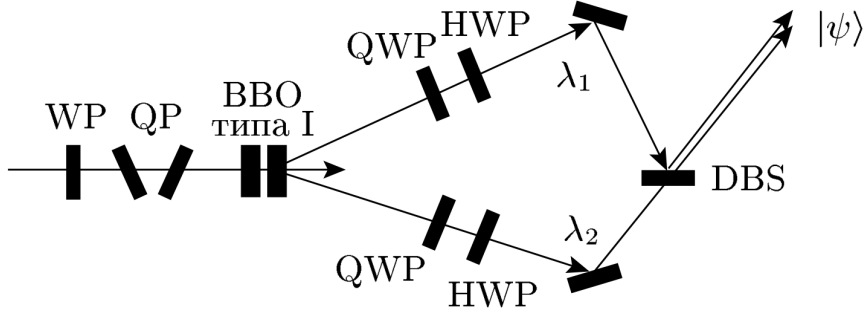


Рис. 4: Схема приготовления произвольного поляризационного состояния кукварта, предложенная в работе [22].

диафрагм. Чем меньше апертура, тем более чистым получится состояние. Более подробное объяснение будет приведено в главе «Эксперимент».

Чтобы продемонстрировать высокую чистоту и степень перепутывания приготовленного состояния авторы произвели проекционное измерение на состояние $|DD\rangle$. Рассмотрим два предельных случая. Пусть входное состояние имеет вид (33), и $\theta = 45^\circ$. Тогда найдём, что скорость счёта совпадений p равняется:

$$p = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle DD | (|HH\rangle + e^{i\varphi} |VV\rangle) \right|^2 = \frac{1}{4} (1 + \cos(\varphi)). \quad (34)$$

Видность функции $p(\varphi)$ $V = (p_{max} - p_{min}) / (p_{max} + p_{min})$ в данном случае равняется единице $V = 1$. Если состояние на входе будет полностью смешанным или факторизованным, то зависимость от φ пропадает, и видность $V = 0$. В работе приведены графики изменения видности от размера диафрагм. При диаметре 1.76 мм наблюдается практически идеальная видность $V = 98.8 \pm 0.2\%$. При большой апертуре в 12 мм видность $V \approx 70\%$.

Приготовление произвольных состояний куквартов в процессе СПР типа-I с неколлинеарным частотно-невырожденным синхронизмом реализовано в работе [22]. Данная работа объединяет схему приготовления «затравочного» состояния с двумя кристаллами с идеей локальных преобразований. Упрощённая схема установки изображена на рис. 4. Рассмотрено влияние эффектов частотной дисперсии в кристаллах, приводящих к ухудшению чистоты приготавливаемого состояния, а также предложен метод компенсации этого явления.

4 Постановка задачи

В настоящей работе поставлены следующие задачи:

1. Расширить программную реализацию адаптивного байесовского протокола томографии со случая двумерных систем – кубитов – на случай состояний произвольной размерности.
2. Собрать экспериментальную установку, которая позволяла бы осуществлять томографию куквартов на примере поляризационных состояний бифотонов, получаемых в процессе спонтанного параметрического рассеяния.
3. Провести экспериментальное сравнение исследуемого адаптивного протокола с протоколом томографии, использующем случайно выбранные измерения.

5 Теория

5.1 Описание метода томографии

В настоящем разделе кратко описана схема адаптивной байесовской томографии, предложенная в работе [1]. В рассматриваемой работе предложен энтропийный критерий оптимального измерения:

$$\alpha_{N+1} = \operatorname{argmax}_{\alpha \in \mathcal{A}} \left(\mathbb{H} \circ \mathbb{P}(\gamma|\alpha, \hat{\rho}) - \mathbb{E}_{p(\rho|\mathcal{D}_N)} \circ \mathbb{H} \circ \mathbb{P}(\gamma|\alpha, \rho) \right), \quad (35)$$

$$\hat{\rho} = \mathbb{E}_{p(\rho|\mathcal{D}_N)}[\rho], \quad (36)$$

$$\mathbb{H} = - \sum_{\gamma} \mathbb{P}(\gamma) \log(\mathbb{P}(\gamma)), \quad (37)$$

где $\circ$ – операция композиции двух функций, $\hat{\rho}$ – среднее по апостериорному распределению состояние, $\mathbb{H}$ – энтропия Шеннона. Приведённый критерий сводится к тому, что необходимо найти такое измерение, которое максимально уменьшит энтропию нового распределения $p(\rho|\mathcal{D}_{N+1})$ (в среднем по результатам γ_{N+1} , которые, естественно, неизвестны заранее).

Для оценки истинного состояния используется среднее $\hat{\rho}$ [9]. Погрешность восстановления оценивается, как размер распределения в выбранной метрике:

$$d = \sqrt{\mathbb{E}_{p(\rho|\mathcal{D})}[d^2(\rho, \hat{\rho})]}. \quad (38)$$

При необходимости можно найти также любые другие величины, связанные с байесовским распределением.

Прямое применение выражения (12) для пересчёта вероятностей трудоёмко (особенно для многомерных систем) с вычислительной точки зрения. Например, в формуле (12) требуется нахождение нормировочного интеграла в пространстве состояний кукварта, которое характеризуется $4^2 - 1 = 15$ вещественными параметрами. Поэтому для аппроксимации байесовского распределения и вычисления связанных с ним величин используют алгоритмы из семейства методов Монте-Карло [4]. В оригинальной работе [1] предложен алгоритм, являющийся вариантом последовательной выборки по значимости (sequential importance sampling – SIS).

На основе распределения $p(\rho)$ задаётся набор точек (обычно называемых частицами) $\{\rho_s\}_{s=1,\dots,S}$ с соответствующими весами («вероятностями») $\{w_s\} : \sum_s w_s = 1$. Множество пар (ρ_s, w_s) называется выборкой из распределения вероятностей $p(\rho)$. Полученная выборка аппроксимирует распределение $p(\rho)$ следующим образом:

$$p(\rho) \approx \sum_{s=1}^S w_s \delta(\rho - \rho_s). \quad (39)$$

После наблюдения очередного результата измерения γ_{n+1} в конфигурации α_{n+1} , применяя аппроксимацию (39), согласно (12) получим:

$$\begin{aligned} p(\rho|\mathcal{D}_{n+1}) &= \frac{\mathbb{P}(\gamma_{n+1}|\alpha_{n+1}, \rho) p(\rho|\mathcal{D}_n)}{\int \mathbb{P}(\gamma_{n+1}|\alpha_{n+1}, \rho) p(\rho|\mathcal{D}_n) d\rho} \approx \\ &\approx \sum_{s=1}^S \frac{\mathbb{P}(\gamma_{n+1}|\alpha_{n+1}, \rho_s) w_s^{(n)}}{\sum_{r=1}^S \mathbb{P}(\gamma_{n+1}|\alpha_{n+1}, \rho_r) w_r^{(n)}} \delta(\rho - \rho_s) \equiv \sum_{s=1}^S w_s^{(n+1)} \delta(\rho - \rho_s), \end{aligned} \quad (40)$$

где $w_s^{(n)}$ – вес частицы ρ_s , отвечающий распределению $p(\rho|\mathcal{D}_n)$. В итоге, пересчёт вероятностей для получения апостериорного распределения сводится к простой рекуррентной процедуре: текущий вес $w_s^{(n)}$ умножается на вероятность $\mathbb{P}(\gamma_{n+1}|\alpha_{n+1}, \rho_s)$, затем все веса нормируются.

По мере процесса томографии размер байесовского распределения становится всё меньше, оно сосредотачивается вблизи томографируемого состояния, и, так как пересчитываются только веса частиц, а их положения фиксированы, на каком-то шаге веса значительного числа частиц оказываются близки к нулю – качество аппроксимации падает. Для отслеживания этой ситуации вводится эффективный размер выборки S_{eff} :

$$S_{eff} = \left(\sum_{s=1}^S w_s^2 \right)^{-1}. \quad (41)$$

Как только данный параметр падает ниже заданного порога (в нашем случае он составляет $1/10$ от полного числа частиц), то происходит процедура повторной выборки (resampling). Метод повторной выборки опирается на алгоритм Метрополиса – Гастингса [23] и состоит из нескольких частей:

1. Из имеющихся частиц с вероятностью w_k выбрать частицу с номером k . Повторить этот процесс S раз.
2. Присвоить всем новым частицам одинаковый вес $1/S$.
3. Подвергнуть каждую из полученных частиц случайному блужданию согласно алгоритму Метрополиса – Гастингса с заданным числом шагов.

Для работы алгоритма Метрополиса – Гастингса необходимо задать правило случайного блуждания исходной частицы $\rho_0 \rightarrow \rho$. Затем новая частица принимается с вероятностью (acceptance ratio)

$$\alpha = \min(p(\rho)/p(\rho_0), 1). \quad (42)$$

Если частица принята, то в следующей итерации эта новая частица будет подвергнута блужданию ($\rho \rightarrow \rho'$), иначе снова осуществляется блуждание старой частицы ($\rho_0 \rightarrow \rho''$). Вероятность $p(\rho)$ в точке нахождения новой частицы вычисляется на основе полной истории измерений, так как в общем случае новая частица не совпадает ни с одной частицей из имеющейся выборки.

Правило случайного блуждания можно описать как вероятность перехода $q(\rho|\rho_0)$ от частицы ρ_0 к ρ . Согласно алгоритму Метрополиса – Гастингса эта вероятность должна быть симметрична по перестановке аргументов $q(\rho|\rho_0) = q(\rho_0|\rho)$, чтобы повторная выборка правильно аппроксимировала непрерывное распределение $p(\rho)$. Ясно, что для выполнения данного требования не подойдёт алгоритм блуждания, имеющий какое-либо выделенное направление. Проиллюстрируем это следующим рассуждением: пусть существует выделенное направление и вероятность шага $\rho_0 \rightarrow \rho$ равна q , тогда второй шаг $\rho \rightarrow \rho'$ обладает той же вероятностью q , если он осуществляется в том же направлении, что и первый, а вероятностью шагнуть назад в исходную точку ρ_0 меньше. Таким образом, распределение $q(\rho|\rho_0)$ должно быть сферически симметричным относительно ρ_0 .

Вычисление вероятности в точке нахождения новой частицы по полной истории измерений – дорогостоящая процедура, требующая число операций порядка $O(N)$,

где N – число проведённых измерений⁴. Естественно минимизировать количество шагов в алгоритме Метрополиса – Гастингса. Хотя сферически симметричное распределение $q(\rho|\rho_0)$ может быть «изрезанным» по различным направлениям, естественно потребовать, чтобы производимое им блуждание в равной степени захватывало всевозможные направления. В этом случае можно уменьшить количество итераций принятия, отбрасывания частиц в алгоритме Метрополиса – Гастингса за счёт изначально равномерного по направлениям распределения $q(\rho|\rho_0)$ при том же качестве повторной выборки (область вокруг ρ_0 обследована по всевозможным направлениям).

Нахождение метода блуждания, удовлетворяющего упомянутому выше требованию, явилось одной из проблем при обобщении алгоритма томографии кубитов на случай произвольной размерности. Дальнейшее обсуждение данного вопроса приведено в разделе 5.3.

5.2 Априорное распределение

Для целей квантовой томографии априорное распределение должно быть как можно менее информативным. Естественно выбрать такое распределение, в котором любое состояние ρ встречается с равной вероятностью. Для определения понятия вероятности необходимо задать какую-либо меру μ на N -мерном пространстве состояний $\mathcal{H}_N$.

При использовании последовательной выборки по значимости равновероятность в соответствии с какой-либо мерой означает, что, выбрав некоторую область $V \subset \mathcal{H}_N$ в пространстве состояний, среднее количество попавших туда частиц пропорционально мере этой области $\mu(V)$.

Можно определить меру, считая, что максимальная симметрия меры соответствует требованию наименьшей информативности [24, 25]. В случае чистых состояний данное условие позволяет выделить единственную меру $d\mu_N(|\psi\rangle)$, определяемую требованием инвариантности относительно всех унитарных преобразований $U(N)$. Иными словами, мера в пространстве чистых состояний в $\mathcal{H}_N$ порождается мерой Хаара на унитарной группе $U(N)$ [26, 27], то есть случайное состояние $|\psi\rangle$ может

⁴Следует учесть, что полное число операций при повторной выборке составляет $O(N \times S \times M)$. В наших экспериментах $N \sim 10^5$, число частиц в распределении $S = 10^3$, число шагов в алгоритме Метрополиса – Гастингса $M = 50$.

быть получено умножением фиксированного состояния $|\psi_0\rangle$ на случайную матрицу, распределённую равномерно согласно мере Хаара: $|\psi\rangle = U|\psi_0\rangle$.

Однако, для случая смешанных состояний этого условия для однозначного нахождения меры на пространстве матриц плотности недостаточно [26], и дополнительные условия, позволяющие выделить единственную меру, необходимо искать из других соображений. Например, можно предположить, что исследуемая система размерности N находится во взаимодействии с другой системой – окружением – размерности K , и составная система находится в чистом состоянии. Мера на составной системе известна, и, после взятия частичного следа по окружению, она порождает меру $\mu_{N,K}$ на пространстве состояний исходной системы $\mathcal{H}_N$. Такой класс мер исследовался в работах [24, 27].

Возможен и другой подход к построению ансамблей матриц плотности. Пусть в пространстве состояний $\mathcal{H}_N$ задана метрика $d(\rho, \rho_0)$, тогда каждому шару $B = \{\rho \in \mathcal{H}_N : d(\rho, \rho_0) \leq R\}$ радиуса R припишем одинаковую меру. В упомянутой работе [27] показано, что мера, получаемая взятием частичного следа при $N = K$, совпадает с мерой, порождаемой метрикой Гильберта – Шмидта (14): $\mu_{N,N} = \mu_{HS}$.

В настоящей работе используется априорное распределение, порождаемое метрикой Бюреса [28]:

$$d_B(\rho, \rho_0) = \sqrt{2 - 2\sqrt{F(\rho, \rho_0)}}, \quad (43)$$

где F – степень совпадения (16).

Выбор в пользу метрики Бюреса обосновывается тем, что в случае многократных измерений одного и того же состояния она связана с границей Чернова (Chernoff bound) [29], которая показывает минимальную вероятность ошибки различения двух состояний при повторяющихся измерениях [30, 31] (ясно изложенная сводка основных результатов приведена в начале [8]).

При реализации протокола томографии кубитов для генерации априорного распределения и случайного блуждания в алгоритме Метрополиса – Гастингса использовался следующий факт [32]: множество двумерных матриц плотности, параметризованных параметрами Стокса, с введённой метрикой Бюреса изометрично одной половине единичной 3-сферы с евклидовой геометрией. Вывод данной теоремы существенно опирается на двумерность пространства, и она несправедлива для пространств с большей размерностью.

В работе [33] приведён простой метод генерации случайных матриц плотности, распределённых равномерно в соответствии с метрикой Бюреса и Гильберта – Шмидта. Случайное бюресовское состояние ρ_B составляется согласно выражению:

$$\rho_B = \frac{(1 + U)GG^\dagger(1 + U^\dagger)}{\text{Tr}[(1 + U)GG^\dagger(1 + U^\dagger)]}, \quad (44)$$

где U – случайная унитарная матрица, равномерно распределённая по мере Хаара; G – случайная матрица, принадлежащая ансамблю Жинибра (Ginibre) [34]. вещественные и мнимые части элементов матрицы из ансамбля Жинибра по определению являются независимыми случайными гауссовскими величинами с нулевым средним и одинаковой дисперсией. Конкретное значение дисперсии в нашем случае не важно из-за нормировки в (44). Ансамбль Жинибра инвариантен относительно унитарных преобразований: $G \rightarrow UGU^\dagger$.

Для получения априорного распределения, порождаемого метрикой Гильберта – Шмидта, можно воспользоваться одним из следующих соотношений:

$$\rho_{HS} = \frac{GG^\dagger}{\text{Tr} GG^\dagger} = \text{Tr}_N |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (45)$$

здесь $|\psi\rangle = U|\psi_0\rangle$ – случайный вектор из расширенного пространства $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_N$. Последнее равенство справедливо ввиду эквивалентности индуцированной меры $\mu_{N,N}$ и меры Гильберта – Шмидта μ_{HS} .

В выражениях (44) и (45) фигурирует случайная матрица U , равномерно распределённая по мере Хаара. Для её генерации предложено несколько методов: метод Блюме [4], Жижковского [35, 36], Медзадри [37]. В задаче создания априорного распределения все данные методы приводят к одинаковому результату, так как здесь не имеет значения близость получаемых состояний – состояния должны находиться во всём пространстве $\mathcal{H}_N$. Однако, эти методы обладают недостатками при осуществлении случайных блужданий и генерации окрестности какого-либо фиксированного состояния. Рассмотрим их более подробно в следующем разделе.

5.3 Генерация случайных блужданий

Ограничимся рассмотрением случайных блужданий для чистых состояний, так как для блуждания в пространстве матриц плотности достаточно воспользоваться расширением до чистого состояния: очищенный вектор подвергается преобразованию, а

затем берётся частичный след по вспомогательной системе. При этом, однако, блуждание в пространстве состояний исходной системы будет производиться в соответствии с мерой $\mu_{N,N} = \mu_{HS}$, индуцированной операцией взятия частичного следа.

В используемом нами протоколе томографии случайные блуждания используются в двух местах: алгоритм Метрополиса – Гастингса и метод случайного поиска оптимального измерения (35). Они оба требуют, чтобы средний размер шага блуждания поддавался управлению. Если же взять случайный вектор, порождённый мерой Хаара, $\psi = U\psi_0$, то он будет распределён равномерно во всё пространстве. Поэтому матрица U должна быть близка к единичной.

Чтобы проверить является ли блуждание равномерным по всем направлениям, можно сгенерировать окрестность вокруг произвольного фиксированного центра, каждый раз начиная блуждание из этого центра. Если потребовать, чтобы размер шага не превышал заданной величины d , то сравнение полученной окрестности с шаром радиуса d даст оценку изотропности блуждания.

Приведённые ниже методы (кроме метода Блюме) изначально были предназначены для генерации всевозможных унитарных матриц. Последний метод (Медзадри) удалось адаптировать для получения локальных преобразований.

Метод Блюме. Метод Блюме позволяет производить шаги с регулируемым размером и состоит из следующих этапов:

1. Выбрать направление шага, сгенерировав два случайных числа $i, j = 1, \dots, N$.
2. Определить эрмитов оператор H_{ij} , который действует только на подпространство, образованное базисными векторами $|i\rangle$ и $|j\rangle$, по правилу: $H_{ij} = \sigma_x$ при $i < j$, $H_{ij} = \sigma_y$ при $i > j$, $H_{ij} = \sigma_z$ при $i = j$ ⁵, где $\sigma_{x,y,z}$ – матрицы Паули.
3. Выбрать случайный размер шага δ (например, распределённый по гауссовскому закону): $\langle \delta \rangle = 0$ и $\langle \delta^2 \rangle = \Delta^2$. Δ играет роль среднего размера шага.
4. Осуществить блуждание $|\psi\rangle \rightarrow e^{i\delta H_{ij}}|\psi\rangle$.

Сгенерированная для двумерного случая окрестность состояния $|H\rangle$ представлена на рисунке 5а. Каждая точка получена в результате двух шагов случайного

⁵В оригинальной статье [4] по всей видимости содержится ошибка, ибо при $i = j$ говорить о двумерном подпространстве, на котором действует σ_z , не приходится. Поэтому при проверке алгоритма случай $i = j$ был отброшен.

блуждания. Из рисунка отчётливо видно, что существуют два направления, вдоль которых преимущественно располагаются состояния. Это связано с тем, что при двух итерациях метода велика вероятность оба раза шагнуть в одном и том же направлении, то есть выбрать одинаковую пару (i, j) . Для уменьшения такого эффекта можно увеличить число итераций, что нежелательно, так как приведёт к усложнению вычислений, либо явно указать не повторяющиеся пары (i, j) . Например, на первом шаге $(i, j) = (1, 2)$, а затем $(i, j) = (2, 1)$. Результат работы модифицированного алгоритма приведён на рисунке 5b. Распределение приняло изотропную форму, однако оно сохраняется не для всех начальных состояний (например, для $|R\rangle$ см. рис. 5с). По этим причинам данный метод случайного блуждания не следует использовать для целей повторной выборки.

Метод Жижковского. Унитарная матрица, распределённая по мере Хаара, образуется перемножением элементарных случайных вращений в двумерных подпространствах. Авторами используется явная параметризация и, ограничивая максимальные значения параметров, возможно получить близкие состояния. Однако, нам не удалось получить «круглые» окрестности с произвольным центром.

Степень совпадения между центром шара, равномерно заполненного по мере Хаара, и какой-либо его точкой является случайной величиной. Для дальнейшего рассмотрения нам потребуется алгоритм генерации значений этой случайной величины, который можно получить из метода Жижковского. Достаточно найти степень совпадения вида (используются обозначения оригинальной работы)

$$F(|0\rangle, U|0\rangle) = |\langle 0|U|0\rangle|^2 = |\cos(\varphi_{N-2, N-1})e^{i\psi_{N-2, N-1}}|^2 = \cos^2(\varphi_{N-2, N-1}), \quad (46)$$

где $\varphi_{N-2, N-1} = \arcsin(\xi^{1/(2N-2)})$ – одна из координат в используемой авторами параметризации, а ξ – равномерно распределённая величина на отрезке $[0, \delta]$. Подставляя ξ , найдём

$$F(|0\rangle, U|0\rangle) = 1 - \xi^{1/(N-1)}, \quad (47)$$

здесь N – размерность пространства. При $\delta = 1$ получим степень совпадения для «шара», охватывающего всё пространство чистых состояний.

Метод Медзадри основывается на QR-разложении. QR-разложением матрицы G называется представление вида

$$G = QR, \quad (48)$$

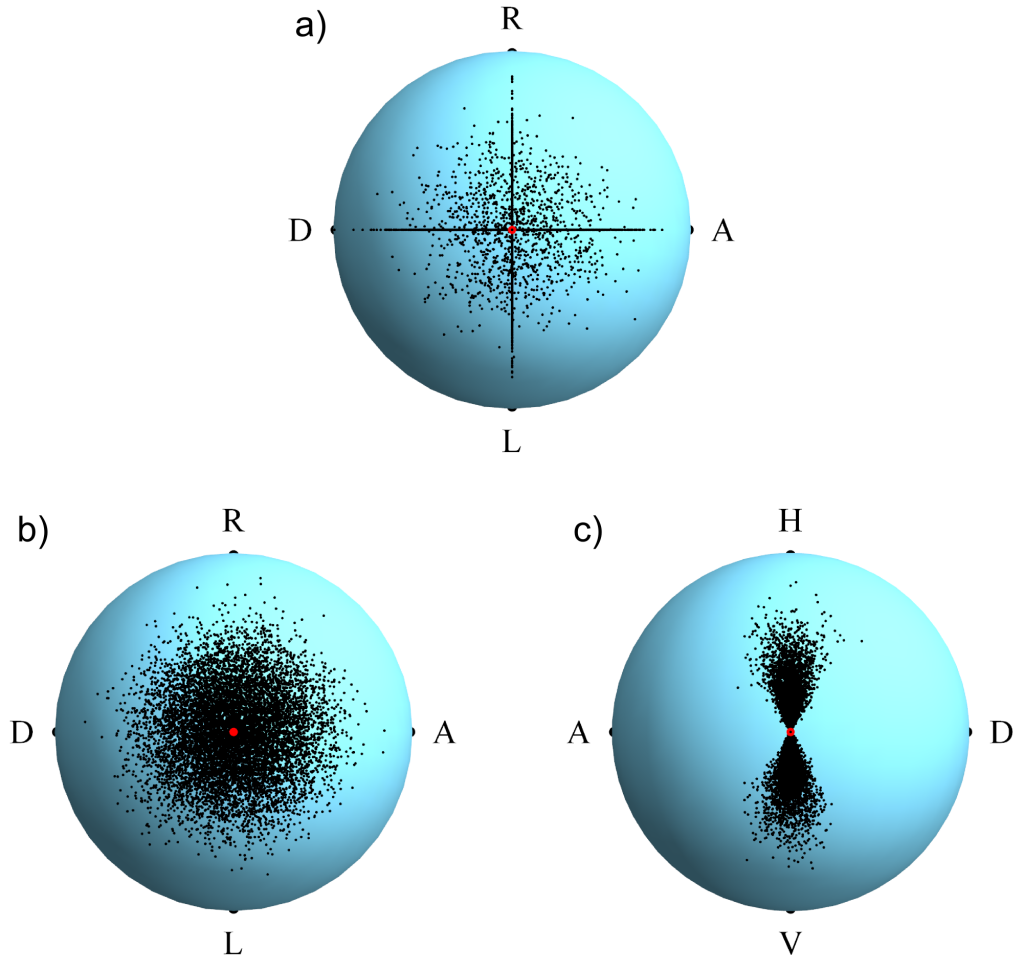


Рис. 5: Распределения чистых состояний на сфере Блоха, полученные методом Блюме. Размер шага выбран случайной гауссовской величиной со стандартным отклонением $\Delta = 0.1$. Количество состояний равно 10^4 . Красная точка – центр окрестности. а) Каждое состояние получено в результате двух шагов случайного блуждания в соответствии с исходным вариантом алгоритма (см. сноску 5 на стр. 28). б) Окрестность с центром в точке $|H\rangle$, сгенерированная модифицированным методом. в) То же, что и б) для окрестности с центром в $|R\rangle$.

где Q – унитарная матрица, R – обратимая верхнетреугольная матрица (элементы ниже диагонали равны нулю). QR разложение не единственно. Действительно, если ввести диагональную матрицу $\Lambda = \text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_N})$, то получим другое разложение:

$$G = QR = Q\Lambda\Lambda^{-1}R = Q'R', \quad (49)$$

где $Q' = Q\Lambda$, $R' = \Lambda^{-1}R$. Для выделения единственного разложения следует потребовать, чтобы диагональные элементы матрицы R были вещественными и положительными. Одним из простейших вариантов QR-разложения является процесс ортогонализации Грама – Шмидта: в результате ортогонализации столбцов матрицы G получим Q .

Если взять матрицу G , принадлежащую ансамблю Жинибра, и подвергнуть её QR-разложению, то матрица Q будет равномерно распределённой по мере Хаара. Иными словами, ансамбль Жинибра порождает случайные хааровские матрицы.

Модификация метода Медзадри. Для получения выражения, описывающего локальные блуждания начального вектора состояния $|\psi_0\rangle$, заметим, что первый столбец матриц G и Q совпадает с точностью до множителя, так как матрица R является верхнетреугольной. Выделим из ансамбля Жинибра такие матрицы G_{ψ_0} , у которых первый столбец совпадает с $|\psi_0\rangle$ (это всегда можно сделать, ибо элементы матрицы G независимы и принимают всевозможные значения с ненулевой вероятностью). Полученное подмножество матриц Жинибра породит подмножество хааровских матриц Q_{ψ_0} . Матрицы Q_{ψ_0} обладают тем свойством, что все они переводят вектор $|0\rangle$ в $|\psi_0\rangle$: $|\psi_0\rangle = Q_{\psi_0}|0\rangle$. Любой вектор, отличный от $|0\rangle$, будет преобразовываться по-разному в зависимости от конкретной матрицы Q_{ψ_0} . Таким образом, окрестность с центром в $|0\rangle$ (образ) переходит в некоторую окрестность с центром в $|\psi_0\rangle$ (прообраз). Расстояние между соответствующими точками образа и прообраза сохраняется, так как преобразование унитарно, поэтому распределение по расстоянию до центра инвариантно. Можно предположить, что, имея любой образ, не обязательно шарообразный, в качестве прообраза получим уже круглую окрестность с желаемым радиальным распределением.

Найдём теперь явное выражение для случайного блуждания, используемое нами в протоколе томографии. Для этого случайный вектор $|\varphi\rangle$ в окрестности состояния

$|0\rangle$ выберем следующим образом:

$$|\varphi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (50)$$

здесь a, b – случайные вещественные величины, удовлетворяющие условию нормировки $a^2 + b^2 = 1$. Выбор их закона распределения определяется законом распределения по расстоянию для получаемых случайных векторов. Действительно, степень совпадения $F(|0\rangle, |\varphi\rangle) = a^2$, и если взять a согласно (47)

$$a = \sqrt{1 - \xi^{1/(N-1)}}, \quad (51)$$

то получится окрестность в виде равномерно заполненного по объёму шара с радиусом, выражаемом через параметр δ . При выборе a в виде:

$$a = 1 - d^2/2, \quad (52)$$

образуется окрестность с радиальным распределением (в метрике Бюреса), совпадающим с законом распределения случайной величины d . Нами использовался гауссов закон. При тестировании алгоритма томографии оказалось, что такой выбор a предпочтительнее, чем согласно выражению (51) (доля принятых шагов в алгоритме Метрополиса – Гастингса остаётся постоянной, если стандартное отклонение d выбрать пропорциональным размеру текущего распределения $p(\rho|\mathcal{D})$).

Искомый случайный вектор $|\psi\rangle$ образуется умножением $|\varphi\rangle$ (50) на матрицу Q_{ψ_0} :

[illegible]

где $|q\rangle$ – вектор, получаемый ортогонализацией $|\psi_0\rangle$ и столбца жинибровской матрицы $|g\rangle$. С точностью до нормировки:

$$|q\rangle \propto |g\rangle - |\psi_0\rangle\langle\psi_0|g\rangle. \quad (54)$$

Окончательно найдём, что правило случайного блуждания $\mathcal{W} : |\psi_0\rangle \xrightarrow{\mathcal{W}} |\psi\rangle$ описывается выражением:

$$|\psi\rangle = \mathcal{W}(|\psi_0\rangle) = a|\psi_0\rangle + b \cdot \frac{|g\rangle - |\psi_0\rangle\langle\psi_0|g\rangle}{\| |g\rangle - |\psi_0\rangle\langle\psi_0|g\rangle \|}. \quad (55)$$

Ансамбль Жинибра инвариантен относительно унитарных преобразований U , поэтому имеет место коммутативность $\mathcal{W}$ и U в смысле получаемых окрестностей:

$$U\mathcal{W}(|\psi_0\rangle) = \mathcal{W}(U|\psi_0\rangle), \quad (56)$$

иными словами, можно сначала образовать окрестность вектора $|\psi_0\rangle$, а потом осуществить унитарное преобразование матрицей U , или же исходно повернуть центр $|\psi_0\rangle$ той же матрицей U , а затем строить окрестность в новом центре. Вероятностное распределение точек при этом не изменится. Для доказательства подставим явный вид правила блуждания (55):

$$U\mathcal{W}(|\psi_0\rangle) = aU|\psi_0\rangle + b \cdot \frac{U(1 - |\psi_0\rangle\langle\psi_0|)|g\rangle}{\|(1 - |\psi_0\rangle\langle\psi_0|)|g\rangle\|}, \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(U|\psi_0\rangle) &= aU|\psi_0\rangle + b \cdot \frac{(1 - U|\psi_0\rangle\langle\psi_0|U^\dagger)|g\rangle}{\|(1 - U|\psi_0\rangle\langle\psi_0|U^\dagger)|g\rangle\|} = \\ &= aU|\psi_0\rangle + b \cdot \frac{U(1 - |\psi_0\rangle\langle\psi_0|)U^\dagger|g\rangle}{\|(1 - |\psi_0\rangle\langle\psi_0|)U^\dagger|g\rangle\|}. \end{aligned} \quad (58)$$

Полученные выражения отличаются лишь заменой $|g\rangle \rightarrow U^\dagger|g\rangle$. Но $U^\dagger|g\rangle$ также является столбцом матрицы из ансамбля Жинибра в силу унитарной инвариантности.

Если в выражении (56) подразумевать под U произвольную унитарную матрицу, лишь бы $|\psi_0\rangle = U|\psi_0\rangle$, то найдём, что получаемая окрестность инвариантна относительно любых унитарных поворотов, не сдвигающих её центр. Таким образом, распределение точек, вычисляемое по формуле (55), является радиально симметричным вокруг центра $|\psi_0\rangle$.

Свойство коммутативности (56) позволяет утверждать, что для проверки правила блуждания достаточно ограничиться окрестностью только одной фиксированной точки. Для случая куквартов численно была сгенерирована окрестность состояния $|HH\rangle$ при выбранном согласно (51) параметром a с радиусом $d = 0.3$. С помощью шестимерных гистограмм (6 – число вещественных параметров, характеризующих четырёхмерный вектор состояния) проводилось сравнение полученного распределения с распределением, найденным методом грубой силы (из случайных векторов во всём пространстве вырезался шар того же радиуса). Мерой соответствия служила классическая степень совпадения между гистограммами:

$$F = \sum_i \sqrt{p_i q_i}, \quad (59)$$

где p_i и q_i – частота попадания в i -й элемент для первой и второй гистограммы соответственно. Степень совпадения оказалась равной 0.998, что свидетельствует о получении достаточно шарообразной окрестности.

5.4 Блочные измерения

В отличие от протоколов статических измерений большинство адаптивных схем подразумевает частую смену измерительного базиса. Именно по данной причине достигается лучшая точность определения состояния. При практической реализации адаптивных схем может получиться, что время, затрачиваемое на изменение базиса, велико по сравнению со временем регистрации одного события (отсчёта в детекторе). Поэтому выгодно измерять сразу несколько событий в одном и том же базисе. Однако, при этом желательно сохранить точность, близкую к предельному случаю адаптивной томографии, в котором обновление базиса происходит после каждого события. Возможны два пути:

1. после регистрации каждого события с помощью какого-либо критерия выясняется, является ли текущий базис оптимальным или же нет;
2. регистрируется блок из b событий, чья длина заранее определена. Размер блока подбирается так, чтобы по прошествии в среднем b событий базис переставал быть оптимальным.

Имея в распоряжении схему первого типа, можно вычислить средний по реализациям размер блока $b(N)$ (который, вообще говоря, зависит от числа зарегистрированных событий N) и использовать его уже как заданный заранее для схемы второго типа.

Нами используется второй подход. Примером же схемы первого типа является протокол адаптивной томографии, предложенный в работе [38]. Алгоритм позволяет томографировать чистые состояния произвольной размерности. Авторы предполагают в будущем обобщить его на смешанные состояния. Проведено численное моделирование для случая кубитов. Показано, что в среднем изменение базиса происходит логарифмически редко. А именно, среднее количество смен базиса y зависит от числа событий N как $y = 2.811 \log_2 N - 5.800$. Отсюда нетрудно найти средний размер блока:

$$b = N(y + 1) - N(y) \approx \frac{\ln 2}{2.811} N. \quad (60)$$

В полученном выражении размер блока пропорционален числу зарегистрированных событий. Оказывается, что данный результат напрямую связан со скоростью сходимости степени совпадения $1 - F(N)$. Чтобы понять эту связь, изложим предложенную схему томографии более подробно.

Пусть в ходе проекционных измерений зарегистрировано N событий, и последовательность исходов эксперимента имеет вид $\mathcal{D}_N = \{|\alpha_1\gamma_1\rangle, \dots, |\alpha_N\gamma_N\rangle\}$, где, как и прежде, α обозначает конфигурацию экспериментальной установки (например, углы установки фазовых пластинок), а γ – номер исхода измерения. В качестве результата томографии $|\hat{\psi}\rangle$ выбирается наиболее вероятное состояние по байесовскому распределению $p(\psi|\mathcal{D}_N)$:

$$|\hat{\psi}_N\rangle = \underset{\psi}{\operatorname{argmax}} p(\psi|\mathcal{D}_N) = \underset{\psi}{\operatorname{argmax}} \mathcal{L}(\rho, \mathcal{D}_N) p(\psi) / \mathbb{P}(\mathcal{D}_N), \quad (61)$$

где в последнем равенстве использована формула Байеса и введены стандартные обозначения: $\mathcal{L}(\rho, \mathcal{D}_N)$ – функция правдоподобия, $p(\psi)$ – априорное распределение, $\mathbb{P}(\mathcal{D}_N)$ – нормировочная константа. Далее для простоты положим априорное распределение равномерным согласно мере Хаара $p(\psi) = \text{const}$, что соответствует неинформативному распределению. В явном виде байесовское распределение переписывается в виде:

$$p(\psi|\mathcal{D}_N) = \frac{\prod_{n=1}^N |\langle \alpha_n \gamma_n | \psi \rangle|^2}{\int \prod_{n=1}^N |\langle \alpha_n \gamma_n | \psi \rangle|^2 d\psi}. \quad (62)$$

Выбор оптимального базиса измерения $\mathcal{B}_{N+1} = \{|\alpha_{N+1}1\rangle, \dots, |\alpha_{N+1}\Gamma\rangle\}$ происходит следующим образом. Предположим, что выполнено измерение в данном базисе и получен результат γ , тогда можно найти максимальное значение *логарифмической* функции правдоподобия $\mathcal{L}_\gamma$ с учётом этого исхода. Так как в действительности исход заранее неизвестен, то выполним усреднение по всевозможным исходам:

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \mathbb{P}(\gamma|\mathcal{D}_N) \mathcal{L}_\gamma, \quad (63)$$

где условная вероятность наблюдения исхода определяется выражением

$$\mathbb{P}(\gamma|\mathcal{D}_N) = \int \mathbb{P}(\gamma|\alpha, \psi) p(\psi|\mathcal{D}_N) d\psi. \quad (64)$$

Оптимальным базисом будет тот базис, который максимизирует $\langle \mathcal{L} \rangle$:

$$\begin{aligned} \alpha_{N+1} &= \underset{\alpha}{\operatorname{argmax}} \langle \mathcal{L} \rangle = \\ &= \underset{\alpha}{\operatorname{argmax}} \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \left(\int p(\psi|\mathcal{D}_N) |\langle \alpha \gamma | \psi \rangle|^2 d\psi \right) \max_{\psi} (\log p(\psi|\mathcal{D}_N) + \log |\langle \alpha \gamma | \psi \rangle|^2). \end{aligned} \quad (65)$$

Словесная формулировка полученной формулы такова: требуется найти базис, который максимизирует математическое ожидание максимального значения логарифмической функции правдоподобия.

Далее, следуя за авторами, стоит отметить, что хотя процедура нахождения оптимального измерения явно определена, связанные с ней вычисления довольно трудоёмки, поэтому они предлагают использовать упрощённое выражение:

$$\alpha_{N+1} = \operatorname{argmax}_{\alpha, \gamma} p(|\alpha\gamma\rangle | \mathcal{D}_N). \quad (66)$$

Критерий (66) является хорошей аппроксимацией (65) в случае, когда байесовское распределение $p(\psi | \mathcal{D}_N)$ имеет малый размер и сконцентрировано вблизи томографируемого состояния. В действительности оказывается, что два критерия дают похожие результаты уже через несколько итераций алгоритма томографии.

Помимо вычислительной простоты критерий (66) обладает ещё несколькими достоинствами. Во-первых, сравнив выражения (66) и (61), замечаем, что они совпадают при замене $|\alpha\gamma\rangle \rightarrow |\psi\rangle$. Это означает, что одно из состояний оптимального базиса содержит оценку томографируемого состояния $|\hat{\psi}\rangle$, которая была вычислена ранее. Остальные состояния базиса найдутся из условия взаимной ортогональности. Таким образом, для рассматриваемого протокола оптимальное измерение – измерение в собственном базисе текущей оценки томографируемого состояния. Во-вторых, пусть результат $N + 1$ измерения $|\alpha_{N+1}\gamma_{N+1}\rangle = |\hat{\psi}_N\rangle$. Тогда наиболее вероятное состояние не изменится $|\hat{\psi}_{N+1}\rangle = |\hat{\psi}_N\rangle$, ибо новое байесовское распределение $p(\psi | \mathcal{D}_{N+1}) \propto p(\psi | \mathcal{D}_N) |\langle \psi | \alpha_{N+1}\gamma_{N+1} \rangle|^2$. Из неизменности оценки $|\hat{\psi}\rangle$ следует, что новый оптимальный базис измерения совпадает со старым $\mathcal{B}_{N+1} = \mathcal{B}_N$ и по-прежнему содержит измерение на наиболее вероятное состояние. По мере процесса томографии оценка становится всё ближе к истинному состоянию, и исход, соответствующий наиболее вероятному состоянию, возникает всё чаще. Этот факт позволяет сократить число изменений базиса без ухудшения точности томографии.

В результате численного моделирования авторами получена следующая зависимость скорости сходимости степени совпадения $I = 1 - F$ от числа событий N :

$$\log_2 I = -1.000 \log_2 N + 1.00. \quad (67)$$

Как видно, данный протокол демонстрирует типичное для адаптивных схем поведение $I \propto 1/N$.

Результаты рассматриваемой работы позволяют, поняв условия, при которых оптимальный базис не изменяется, теоретически вычислить средний размер блока. Обозначим p_γ – вероятности исходов, также, не ограничивая общности, положим $\gamma = 1$ – результат, соответствующий измерению на наиболее вероятное состояние (61). Рассмотрим случайную последовательность результатов и выделим в ней блоки, состоящие из одинаковых, идущих подряд исходов. Требуется найти среднюю длину блока $\langle b \rangle$:

$$\langle b \rangle = \sum_{b=1}^{\infty} b \mathbb{P}(b) = \sum_{b=1}^{\infty} b \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \mathbb{P}(b|\gamma) \mathbb{P}(\gamma). \quad (68)$$

Условная вероятность получения блока размером b : $\mathbb{P}(b|\gamma) \propto p_\gamma^b$. С учётом нормировки $\sum_{b=1}^{\infty} \mathbb{P}(b|\gamma) = 1$ получим $\mathbb{P}(b|\gamma) = p_\gamma^{b-1}(1 - p_\gamma)$. $\mathbb{P}(\gamma)$ – вероятность появления блока, состоящего из исходов γ . Она отличается от p_γ и пропорциональна $p_\gamma(1 - p_\gamma)$. С учётом нормировки по γ найдём $\mathbb{P}(\gamma) = \frac{p_\gamma(1-p_\gamma)}{1-\sum_{\gamma} p_\gamma^2}$. Подставив все вероятности в формулу (68), после некоторых вычислений получим:

$$\langle b \rangle = \frac{1}{1 - \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} p_\gamma^2}. \quad (69)$$

В асимптотическом случае, когда оценка $|\hat{\psi}\rangle$ близка к истинному состоянию $|\psi_0\rangle$, $p_1 \approx 1$, а остальные вероятности малы. Сохраняя основной вклад в $\langle b \rangle$ от p_1 запишем:

$$\langle b \rangle \approx \frac{1}{2(1 - p_1)} = \frac{1}{2(1 - |\langle \hat{\psi} | \psi_0 \rangle|^2)} \equiv \frac{1}{2I}. \quad (70)$$

Подставляя в (60) зависимость $N(I)$ из (67), найдём по результатам численного моделирования $\langle b \rangle = 1/2.02I$, что хорошо согласуется с нашей оценкой (70).

6 Эксперимент

6.1 Описание установки

Схема экспериментальной установки изображена на рис. 6. Источником бифотонов является спонтанное параметрическое рассеяние типа-I ($e \rightarrow oo$) в паре кристаллов β -бората бария (ВВО) толщиной 2 мм со взаимно перпендикулярными осями. Кристаллы вырезаны под частотно-вырожденный коллинеарный режим на длине волны 405 нм. Накачкой служит диодный лазер с внешним резонатором, образованным дифракционной решёткой G, установленной по схеме Литтроу (Littrow) [39].

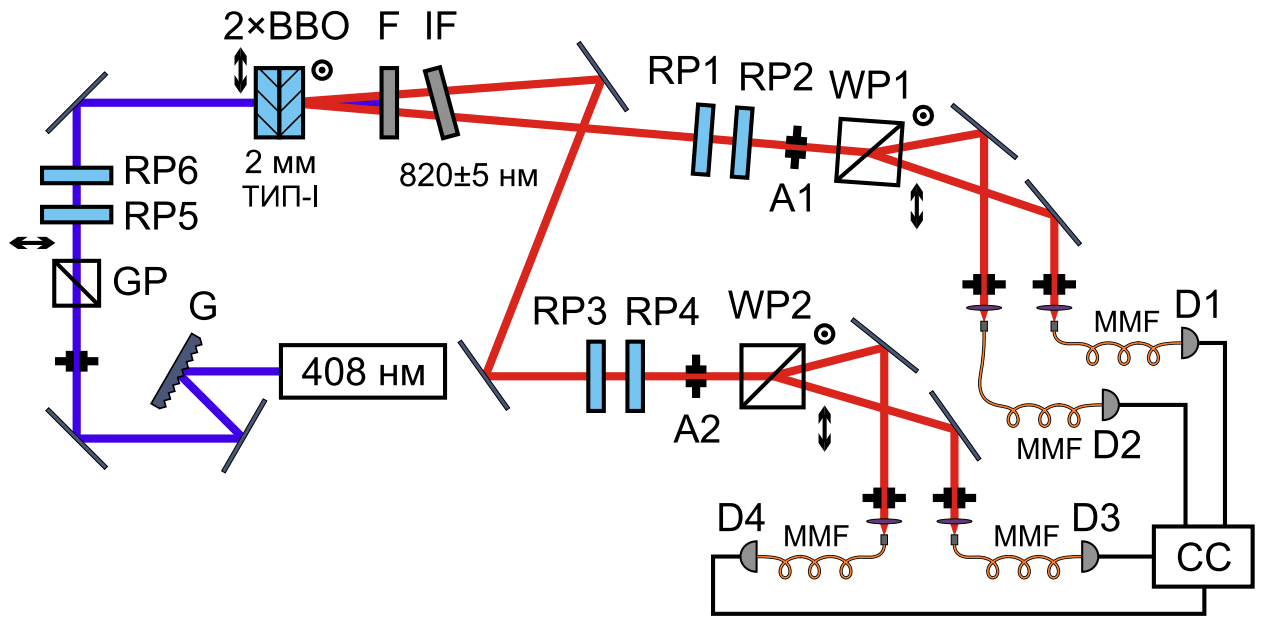


Рис. 6: Схема экспериментальной установки.

В конфигурации Литтроу решётка повернута так, чтобы первый порядок дифракции отражался на поверхность диода, а нулевой порядок выходил из лазерной системы. Спектральная фильтрация отражённого излучения обеспечивает обратную связь, которая повышает добротность системы. Тем самым ширина спектра излучения уменьшается. Наклоном решётки можно перестраивать испускаемую длину волны, которая после юстировки системы равнялась 407.7 нм. Пределы изменения для используемого нами диода оказались невелики, порядка 1 нм (для диодов 780 нм указывается диапазон перестройки порядка 10 нм [40]). Использование внешнего резонатора объясняется тем, что потребовалось сузить спектр излучения (см. следующий раздел). Без резонатора ширина спектра $\Delta\lambda \approx 1$ нм, при его наличии она падает по крайней мере на порядок ($\Delta\lambda < 0.1$ нм). Конкретное значение в последнем случае неизвестно, ибо точность спектральных измерений была ограничена разрешением монохроматора.

Лазер подключён к регулируемому стабилизированному источнику тока. Значение потребляемого тока установлено в 100 мА (максимальный безопасный ток, не вызывающий перегрева диода). Лазер оснащён устройством термостабилизации, выполненном на элементе Пельтье с пассивным радиатором и датчиком температуры. Величина поддерживаемой температуры 38.0 ± 0.2 °C.

Поляризация накачки задаётся призмой Глана-Тейлора GP, пропускающей ори-

зонтальную компоненту, а также парой кварцевых фазовых пластинок RP5 и RP6. Кристаллы ВВО настроены на частотно-вырожденный неколлинеарный режим. Сигнальный и холостой фотоны расходятся под углом $\approx 1^\circ$. На выходе из кристаллов установлен длинноволновой фильтр F с частотой отсечки 450 нм для отсека сигнала прошедшей накачки. После него идёт полосовой интерференционный фильтр IF с центральной длиной волны 820 нм и шириной спектра пропускания на полувысоте 10 нм (значения по каталогу производителя ThorLabs). При попадании накачки на фильтр IF он начинает сильно люминесцировать (интенсивность люминесценции оказывается много больше интенсивности сигнала), поэтому необходим длинноволновой фильтр F, который подвержен этому в гораздо меньшей степени. Фильтр IF предназначен для выделения нужной спектральной компоненты. При работе в частотно-вырожденном режиме сигнальное и холостое излучение обладает длиной волны 815.4 нм (для длина волны накачки 407.7 нм), что попадает на край полосы пропускания фильтра IF. Наклон фильтра позволяет сместить спектр пропускания в коротковолновую область.

В каждом из каналов находятся кварцевые фазовые пластинки нулевого порядка RP1 – RP4, что позволяет выполнять проекционные измерения на факторизованные состояния. По каталогам производителей фазовые пластинки RP1 и RP2 (производства ThorLabs) вносят сдвиг фаз $\lambda/4$ и $\lambda/2$ на длинах волн 808 нм и 830 нм соответственно, а пластинки R3 и R4 (AGOptics) являются четвертьволновой и полуволновой на длине волны 780 нм. Измеренные и используемые нами сдвиги фаз приведены в табл. 2. Пластинки закреплены во вращающихся с помощью шаговых двигателей оправках; минимальный угол поворота равен 0.1° . Опорная точка в задании начального угла поворота определяется посредством датчика Холла и магнита, установленного в оправке, с точностью не хуже 0.2° . Во избежание люфта пластинки вращаются только в одну сторону.

Также в каждом из каналов установлены ирисовые диафрагмы A1 и A2, расположенные на расстоянии 53 см и 90 см от кристаллов соответственно. Диафрагмы позволяют изменять регистрируемый угловой диапазон излучения СПР, что влияет на чистоту приготавливаемого состояния. Далее идут призмы Волластона WP1 и WP2, разделяющие падающее на них излучение на две поляризационные компоненты – вертикальную и горизонтальную. Призмы имеют высокий коэффициент экстинкции $\gtrsim 10^5$ (отношение интенсивностей в двух выходных каналах призмы при падении на

Таблица 2: Сдвиги фаз кварцевых пластинок на длине волны 815.4 нм.

Пластинка	Сдвиг фаз
RP1	$94.12 \pm 0.02^\circ$
RP2	$175.67 \pm 0.34^\circ$
RP3	$88.68 \pm 0.06^\circ$
RP4	$178.18 \pm 0.10^\circ$

неё излучения с поляризацией, соответствующей поляризации одного из выходных каналов). После призм излучение собирается коллиматорами и через многомодовые волокна MMF попадает на счётные фотодетекторы D1, D2, D3, D4 на основе лавинных фотодиодов. Диафрагмы перед коллиматорами предназначены для уменьшения внешней засветки. Зеркала перед коллиматорами служат для удобства юстировки.

Сигнал с детекторов поступает на схему совпадений СС, которая настроена на парные совпадения между детекторами D1–D3, D1–D4, D2–D3, D2–D4. Окно схемы совпадений равно 4 нс. Отсчёты схемы совпадений поступают в программу квантовой томографии, которая управляет четырьмя фазовыми пластинками.

6.2 Калибровка эффективностей детектирования

Ввиду того, что в установке применяются разные коллиматоры (два из них имеют регулируемое фокусное расстояние, а два других – фиксированное), а также из-за неодинаковой точности юстировки, скорость счёта совпадений неизбежно отличается для различных пар детекторов. Для учёта данного эффекта следует ввести поправочные коэффициенты η_γ в выражение для вероятности исхода γ , даваемое правилом Борна (10):

$$\mathbb{P}(\gamma|\alpha, \rho) = \frac{\eta_\gamma \text{Tr } M_{\alpha\gamma} \rho}{\sum_{\gamma=1}^4 \eta_\gamma \text{Tr } M_{\alpha\gamma} \rho}. \quad (71)$$

Для определения эффективностей детектирования η_γ осуществлялось проекционное измерение на случайное состояние. Время накопления совпадений составляло 40 секунд, полное число состояний – 1000. Стоит отметить, что на данном этапе работы установка содержала лишь один нелинейный кристалл, испускавший состояние $|HH\rangle$. Нахождение самих коэффициентов η_i основано на том, что суммарное

Таблица 3: Относительные эффективности детектирования.

i	η_i
1	0.874 ± 0.006
2	0.919 ± 0.008
3	0.981 ± 0.006
4	1 (по опр.)

количество совпадений должно оставаться постоянным:

$$\sum_{\gamma=1}^4 c_{\gamma}/\eta_{\gamma} = \text{const} \equiv I, \quad (72)$$

где c_{γ} – наблюдаемое количество совпадений в паре детекторов номер γ , I – суммарное число совпадений. Данное уравнение задаёт гиперплоскость в пространстве переменных c_{γ} с нормалью вдоль направления $\{1/\eta_{\gamma}\}$. В таблице 3 указаны вычисленные значения. Так как абсолютные значения коэффициентов эффективности не важны, то один из них положен равным единице.

Помимо нахождения эффективностей описанная выше процедура преследовала ещё две цели: проверить стабильность интенсивности во времени (см. рис. 7), и, что более важно, правомерность самого приближения постоянных эффективностей (рис. 8). Это приближение может нарушаться, например, из-за того, что фазовые пластинки установлены не совсем нормально к пучку, и при вращении они несколько уводят луч в сторону. Поэтому эффективность детектирования будет зависеть от конкретного положения пластинок.

График 8 требует пояснений. Как уже было сказано, уравнение (72) описывает гиперплоскость в пространстве переменных c_{γ} . После нахождения гиперплоскости спроецируем на неё наблюдаемые данные. Итого получится массив точек в трёхмерном пространстве, который и изображён на рисунке. Предварительно для наглядности координаты точек были нормированы, чтобы максимальное (минимальное) значение не превышало 1 (−1). Цветом показано расстояние между гиперплоскостью и точкой в исходном четырёхмерном пространстве. В общем случае облако точек образует тетраэдр, вершины которого соответствуют ситуации, в которой весь сигнал направляется лишь в одну из пар детекторов. В нашем случае измерялось факторизованное состояние $|HH\rangle$, поэтому точки лежат на двумерной изогнутой поверхности.

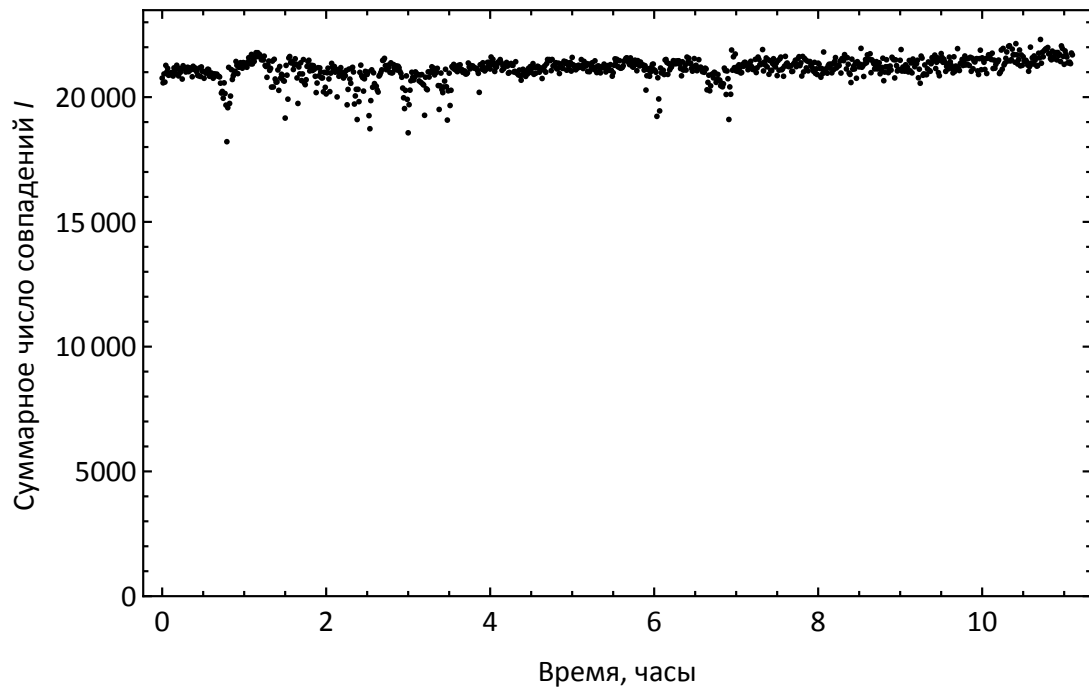


Рис. 7: Зависимость суммарной интенсивности счёта совпадений от времени после калибровки эффективностей детектирования.

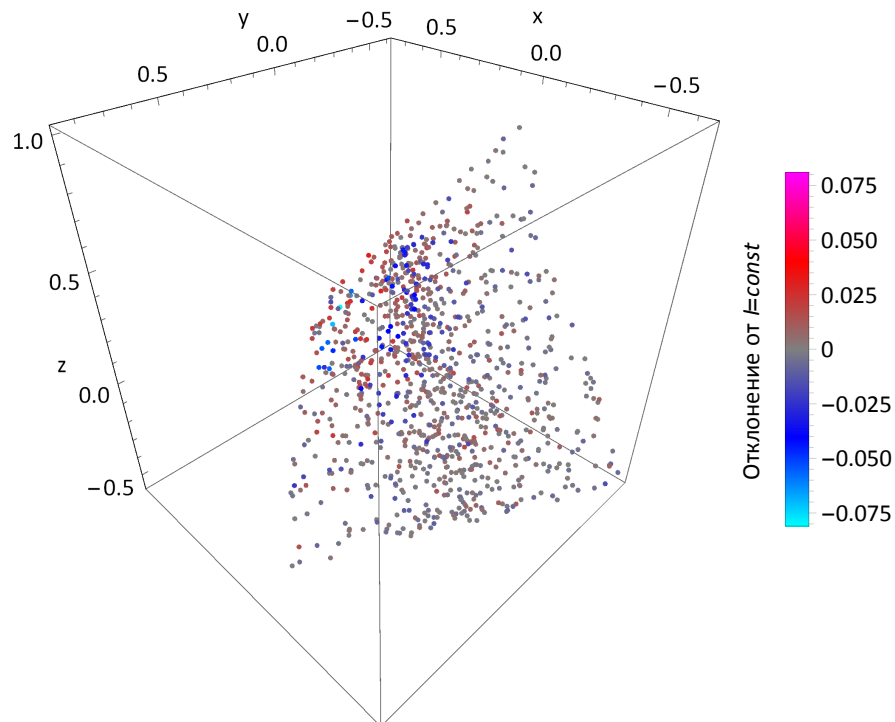


Рис. 8: Проекция нормированных отсчётов на аппроксимирующую гиперплоскость $I = const$.

В целом отклонение точек от аппроксимирующей гиперплоскости мало, но слева, вблизи одного угла, существует область пониженной интенсивности (синие точки). Понижения интенсивности также наблюдаются на рис. 7. Расположение области свидетельствует о том, что неполадки вызваны одним из каналов детектирования. Последующее выяснение причины снижения интенсивности выявило, что один из детекторов обладал плохим контактом с источником питания. В дальнейшем неисправность была устранена.

6.3 Факторы, влияющие на чистоту приготавливаемого состояния

Состояние бифотонного поля $|\psi\rangle$ при СПР типа-I в случае непрерывной накачки описывается выражением:

$$|\psi_p\rangle = \int d\Omega d\theta_1 d\theta_2 f_p(\theta_1, \theta_2, \Omega) a_p^\dagger(\theta_1, \omega_1 + \Omega) a_p^\dagger(\theta_2, \omega_2 - \Omega) |vac\rangle, \quad (73)$$

где f – амплитуда бифотона, зависящая от углов вылета $\theta_{1,2}$ сигнального и холостого фотонов, а также от частотной расстройки Ω . Индекс p обозначает направление поляризации, $p = V$ для первого кристалла, а для второго $p = H$. Введём сокращённые обозначения:

$$x = \{\theta_1, \theta_2, \Omega\}, \quad dx = d\Omega d\theta_1 d\theta_2, \\ a_p^\dagger(\theta_1, \omega_1 + \Omega) a_p^\dagger(\theta_2, \omega_2 - \Omega) |vac\rangle = |\theta_1, \theta_2, \Omega\rangle |PP\rangle = |x\rangle |PP\rangle. \quad (74)$$

При наличии двух кристаллов состояние будет представлять собой суперпозицию:

$$|\psi\rangle = \int dx (f_V(x) |VV\rangle + f_H(x) |HH\rangle) |x\rangle. \quad (75)$$

Пусть схема детектирования описывается проектором M :

$$M_{p_1, p_2} = \int d\tilde{x} (|\tilde{x}\rangle \langle \tilde{x}|) \otimes (|P_1 P_2\rangle \langle P_1 P_2|) g_{p_1, p_2}(\tilde{x}), \quad (76)$$

где функция $g(\theta_1, \theta_2, \Omega)$ учитывает частотный и угловой диапазон, который детектируется в эксперименте. Она зависит от спектра пропускания фильтра IF, а также от размера диафрагм A1 и A2. Скорость счёта совпадений s будет пропорциональна

выражению:

$$\begin{aligned}
c \propto \text{Tr}(M|\psi\rangle\langle\psi|) &= \langle\psi|M|\psi\rangle = \\
&= \int dx g(x) \langle P_1 P_2 | (f_V(x)|VV\rangle + f_H(x)|HH\rangle) (f_V^*(x)\langle VV| + f_H^*(x)\langle HH|) | P_1 P_2 \rangle \equiv \\
&\equiv \langle P_1 P_2 | \rho | P_1 P_2 \rangle, \quad (77)
\end{aligned}$$

где ρ – редуцированный оператор плотности, отвечающий за поляризационные степени свободы. Матрица ρ имеет вид:

$$\begin{aligned}
\rho &= |HH\rangle\langle HH| \int |f_H|^2 g dx + \\
&\quad + |HH\rangle\langle VV| \int f_H f_V^* g dx + \\
&\quad + |VV\rangle\langle HH| \int f_V f_H^* g dx + \\
&\quad + |VV\rangle\langle VV| \int |f_V|^2 g dx.
\end{aligned} \quad (78)$$

Видно, что недиагональные элементы, в отличие от диагональных, зависят от перекрытия амплитуд двух кристаллов. Если амплитуды ортогональны (с весом g), то матрица плотности примет диагональный вид, что означает полностью смешанное состояние. Напротив, при одинаковых амплитудах образуется чистое белловское состояние. Таким образом, изменяя конфигурацию экспериментальной установки g , например, с помощью диафрагм, можно влиять на чистоту приготавливаемого состояния.

Если ограничиться частотными степенями свободы, то приведённое выше рассуждение упрощается. Начнём с рассмотрения состояния $|\psi\rangle = |HH\rangle + e^{i\varphi}|VV\rangle$. Наличие дополнительной относительной фазы φ обусловлено двумя причинами. Во-первых, возникает набег фаз между поляризационными компонентами накачки в первом кристалле. Во-вторых, у фотонов, рождённых в первом кристалле, появляется дополнительная фаза при их прохождении через второй кристалл [41]:

$$\varphi = (k_e(\omega_p) - k_o(\omega_p))L + (k_e(\omega_1 + \Omega) + k_e(\omega_2) - \Omega)L, \quad (79)$$

где ω_p – частота накачки, L – толщина кристалла. Образовав матрицу плотности $|\psi\rangle\langle\psi|$ и проинтегрировав её по частотным переменным, найдём опять, что из-за дисперсии показателей преломления состояние бифотона является смешанным.

Если спектр накачки узкий, то интегрирование по ω_p снимается. Для получения чистых состояний в частотно невырожденном режиме можно скомпенсировать набег

фаз [22]. При совпадающих частотах $\omega_1 = \omega_2$ зависимость $\varphi(\Omega)$ становится квадратичной по Ω и введение компенсатора становится не нужным.

В настоящей работе используется частотно вырожденный синхронизм, а накачкой служит диодный лазер, ширина спектра которого без дополнительных ухищрений составляет порядка 1 нм. Поэтому в выражении (79) учтём лишь первое слагаемое. На интервале в 1 нм зависимость $\varphi(\lambda_p)$ практически линейна с коэффициентом наклона $d\varphi/d\lambda_p = 11.2$ рад/нм. Данное значение велико и следует ожидать практически полностью смешанного состояния.

Для проверки чистоты приготавливаемого состояния производилось следующее измерение. Положение фазовых пластинок в первом канале соответствовало проекции на диагональную поляризацию $|D\rangle$, а во втором канале выполнялась проекция на линейную поляризацию с переменным углом $|\theta\rangle$. Накачка выставлялась диагонально. В данном случае скорость счёта совпадений c :

$$c \propto \langle D\theta|\rho|D\theta\rangle = \frac{1}{4}(1 + V \sin 2\theta), \quad (80)$$

где V – видность полученной зависимости. В то же время число единичных отсчётов остаётся постоянным.

На рис. 9 приведена теоретическая зависимость видности от ширины спектра накачки для гауссовой формы линии. Для ширины спектра 1 нм видность равна нулю, что и было обнаружено в эксперименте. Для получения высоких значений видности требуется ширина спектра $\lesssim 0.1$ нм, что и было достигнуто введением дифракционной решётки по схеме Литтроу.

Видность лимитируется двумя факторами: шириной спектра накачки и конечным угловым диапазоном, который выделяется диафрагмами. Измерения ширины линии с помощью резонатора Фабри – Перо с областью свободной дисперсии 3 ГГц (1.7×10^{-3} нм для рабочей длины волны) выявили следующую особенность работы применяемого нами диода. При токе менее 39 мА ширина линии $\Delta\omega \ll 3$ ГГц, а при увеличении тока $\Delta\omega \gg 3$ ГГц. Поэтому для выяснения влияния частотного и пространственного фактора, были проведены измерения видности при низком (37 мА) и высоком (100 мА) токах, а также при открытых и закрытых диафрагмах (см. табл. 4). Диаметры закрытых диафрагм $A1$ и $A2$ равнялись 0.9 мм и 1.5 мм соответственно, что позволило выделить примерно одинаковый угловой диапазон 0.1° . На рис. 10 и 11 изображена типичная зависимость скорости счёта совпадений и единичных отсчётов

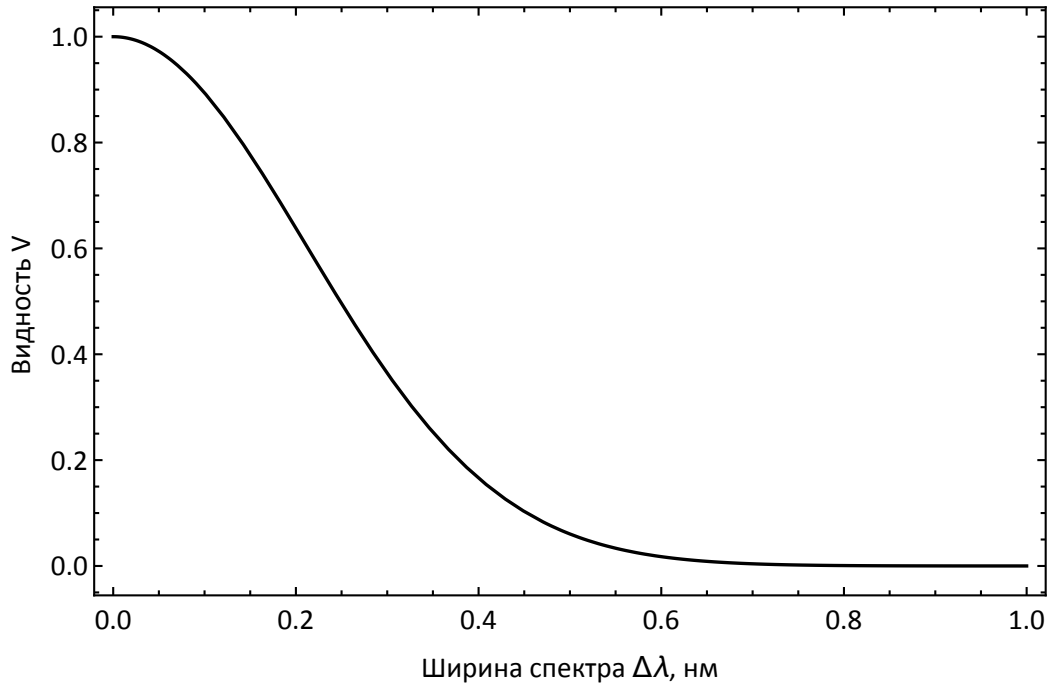


Рис. 9: Теоретическая зависимость видности V от ширины спектра накачки $\Delta\lambda$, определённой на полувысоте. Для расчёта использовалась гауссова форма линии.

от угла поворота поляризации θ в одном из каналов.

Данные из табл. 4 позволяют утверждать, что ни частотный, ни пространственный фактор не является доминирующим. Для получения как можно более чистых состояний требуется одновременно сузить спектр и закрыть диафрагмы. Однако при этом скорость счёта совпадений падает примерно в 60 раз, что приводит к неприемлемо долгой процедуре томографии. Поэтому в дальнейших измерениях использовалось значение тока 100 мА, а диафрагмы были открыты.

7 Результаты

Сравнение исследуемого протокола томографии проводилось со стратегией случайных измерений. В эксперименте произведена томография двух состояний типов состояний: факторизованного $|HH\rangle$ и перепутанного белловского $(|HH\rangle + |VV\rangle)/\sqrt{2}$.

Для каждого из состояний показана зависимость $d_B^2(N)$ среднего по распределению $p(\rho|\mathcal{D}_N)$ квадрата бюресовского расстояния до истинного состояния в зависимости от числа зарегистрированных событий N (см. рис. 12 и 15). Параметры аппроксимации зависимости $d_B^2(N)$ на отрезке $200 \leq N \leq 10^4$ функцией вида b/N^a

Таблица 4: Видность при различной ширине спектра и диаметре диафрагм. Условные обозначения: У – узкий спектр $\Delta\omega \ll 3$ ГГц, Ш – широкий спектр $\Delta\omega \gg 3$ ГГц; О – диафрагмы открыты, З – диафрагмы закрыты до диаметра 0.9 мм и 1.5 мм.

Спектр	Диафрагмы	Видность, %
У	З	92 ± 2
Ш	З	81 ± 2
У	О	86 ± 2
Ш	О	77 ± 2

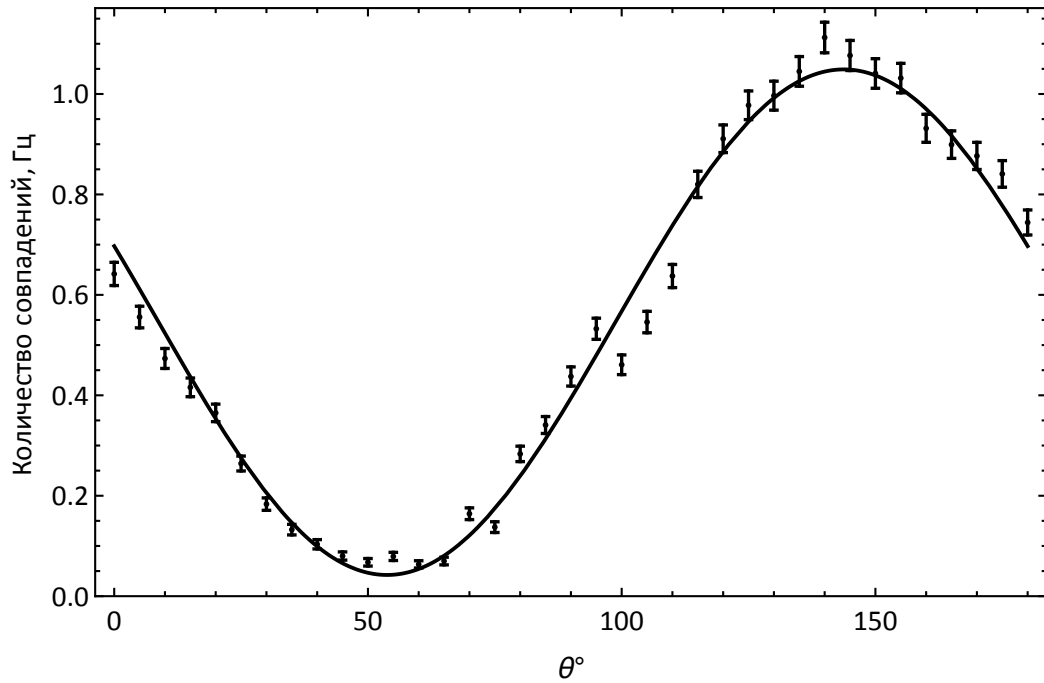


Рис. 10: Зависимость скорости счёта совпадений от угла поворота поляризации θ в одном из каналов при закрытых диафрагмах (диаметры 0.9 мм и 1.5 мм) и узком спектре $\Delta\omega \ll 3$ ГГц (ток диода 37 мА). Видность $92 \pm 2\%$.

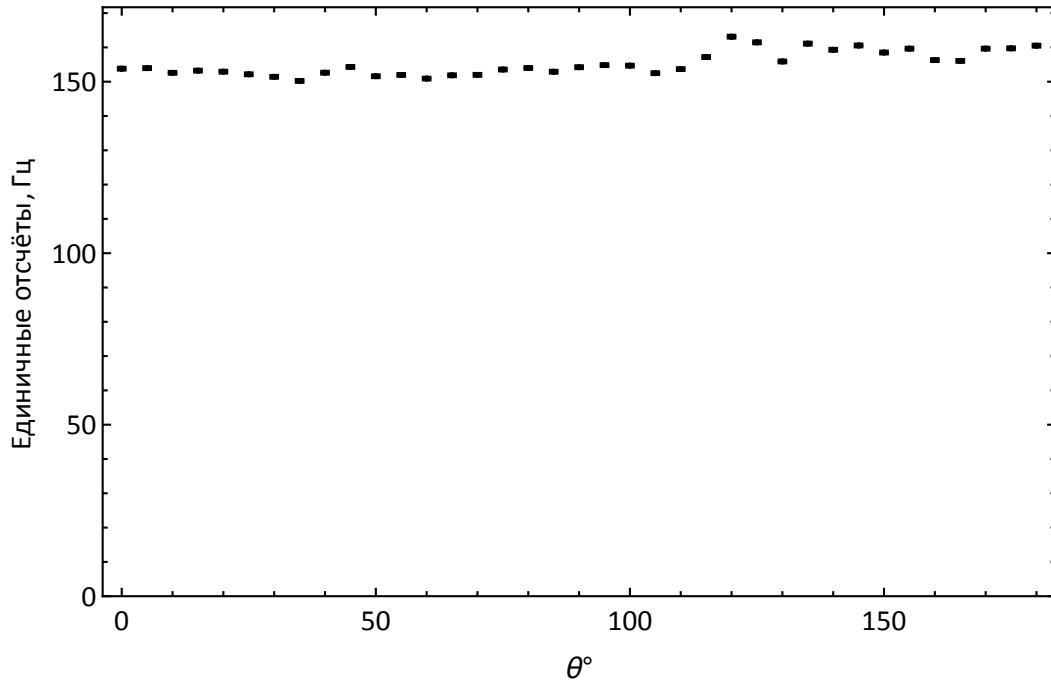


Рис. 11: Зависимость количества единичных отсчётов от угла поворота поляризации θ в одном из каналов при тех же условиях, что и на рис. 10.

представлены в табл. 5. В обоих случаях наблюдается преимущество адаптивного протокола над неадаптивным методом. Матрицы плотности, полученные в ходе томографии, усреднённые по нескольким реализациям, изображены на рис. 13 и 16. Также адаптивный метод лучше восстанавливает чистоту состояния $\text{Tr } \rho^2$ (рис. 14) и степень перепутывания, называемую concurrence [42] (рис. 17).

На графике 12 отчётливо видно, что скорость сходимости для адаптивного метода падает при $N > 10^4$. Данное поведение не связано с погрешностью эксперимента, так

Таблица 5: Параметры аппроксимации размера распределения $d_B^2(N)$ функцией вида b/N^a .

Состояние	Измерения	a	b
$ HH\rangle$	Адаптивные	0.872 ± 0.002	5.01 ± 0.06
	Случайные	0.677 ± 0.001	2.00 ± 0.02
$(HH\rangle + VV\rangle)/\sqrt{2}$	Адаптивные	0.802 ± 0.001	4.91 ± 0.04
	Случайные	0.605 ± 0.002	1.86 ± 0.02

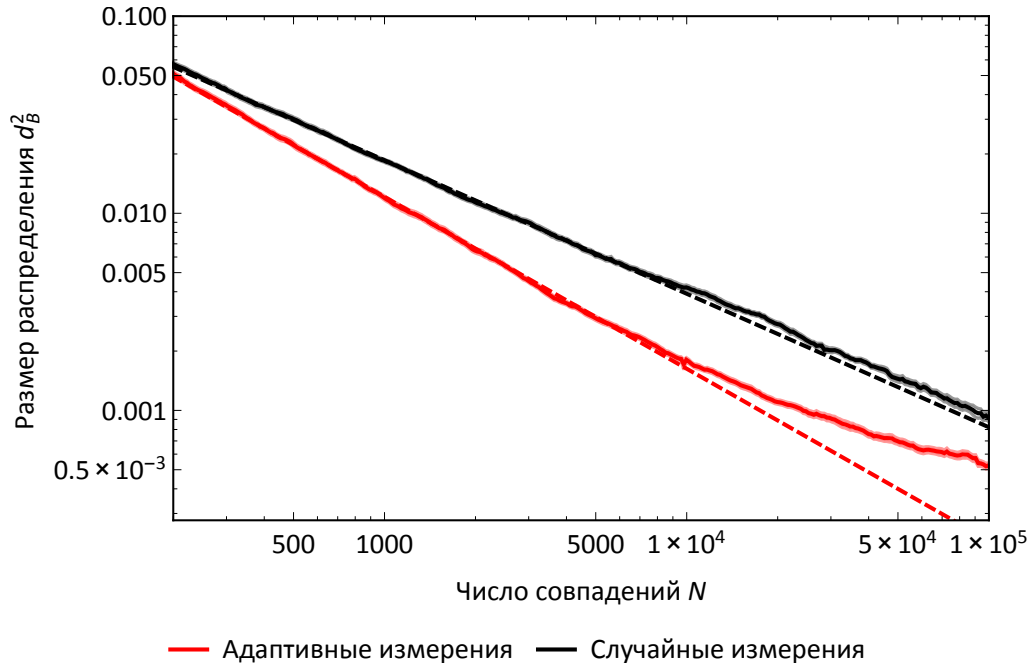


Рис. 12: Экспериментальные зависимости размера байесовского распределения d_B^2 от числа зарегистрированных совпадений N при томографии состояния $|HH\rangle$. Жирные линии – размер распределения, пунктир – аппроксимация степенной функцией вида $d_B^2(N) = c/N^a$. Кривая для адаптивного протокола получена в результате усреднения по 19 реализациям, для случайного – по 18 проходам.

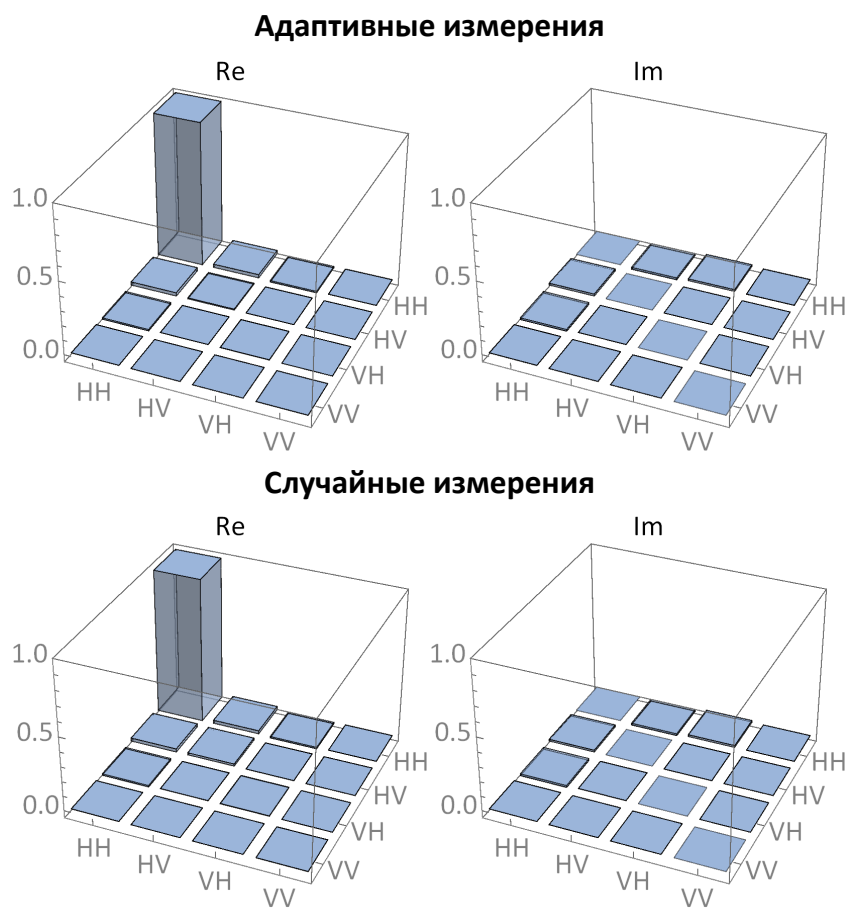


Рис. 13: Усреднённые по реализациям финальные состояния, найденные в эксперименте, на шаге $N = 10^5$ при томографии состояния $|HH\rangle$. Слева изображена вещественная часть элементов матрицы плотности, справа – мнимая.

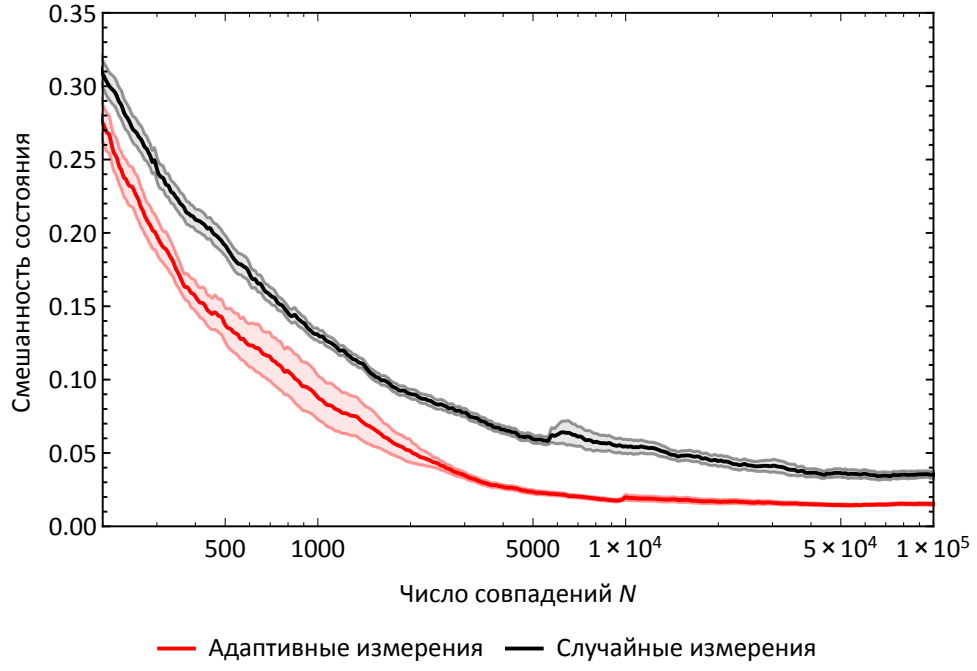


Рис. 14: Экспериментальная зависимость смешанности состояния $1 - \text{Tr } \rho^2$ от числа зарегистрированных совпадений N при томографии состояния $|HH\rangle$. Цветная заливка – разброс результатов отдельных проходов алгоритма томографии (стандартное отклонение среднего).

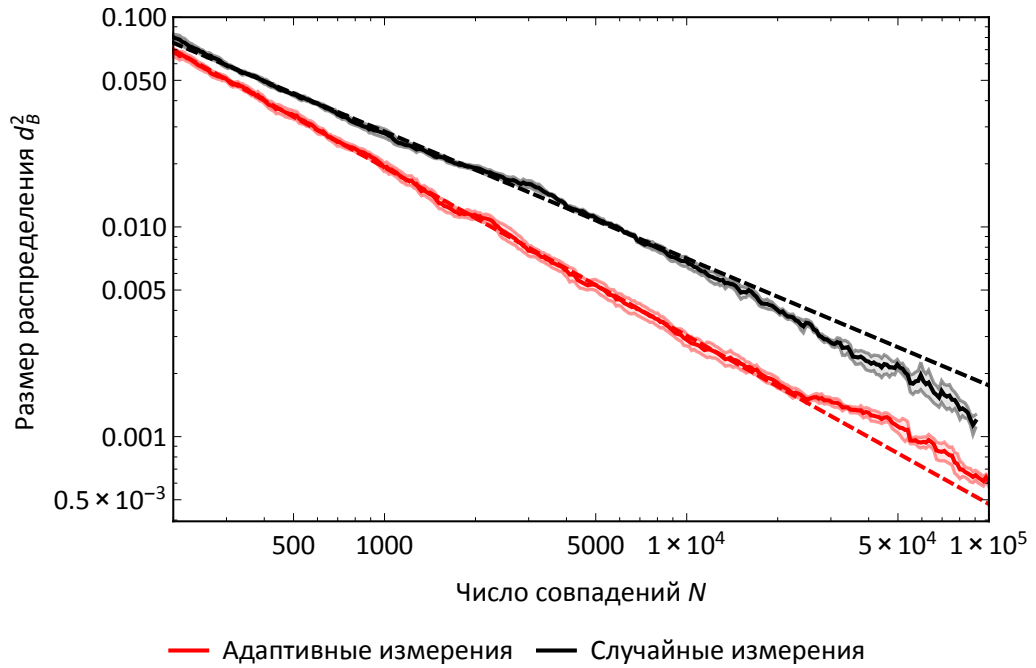


Рис. 15: Экспериментальная зависимость $d_B^2(N)$ при томографии белловского состояния $(|HH\rangle + |VV\rangle)/\sqrt{2}$. Каждая кривая получена усреднением по 5 реализациям.

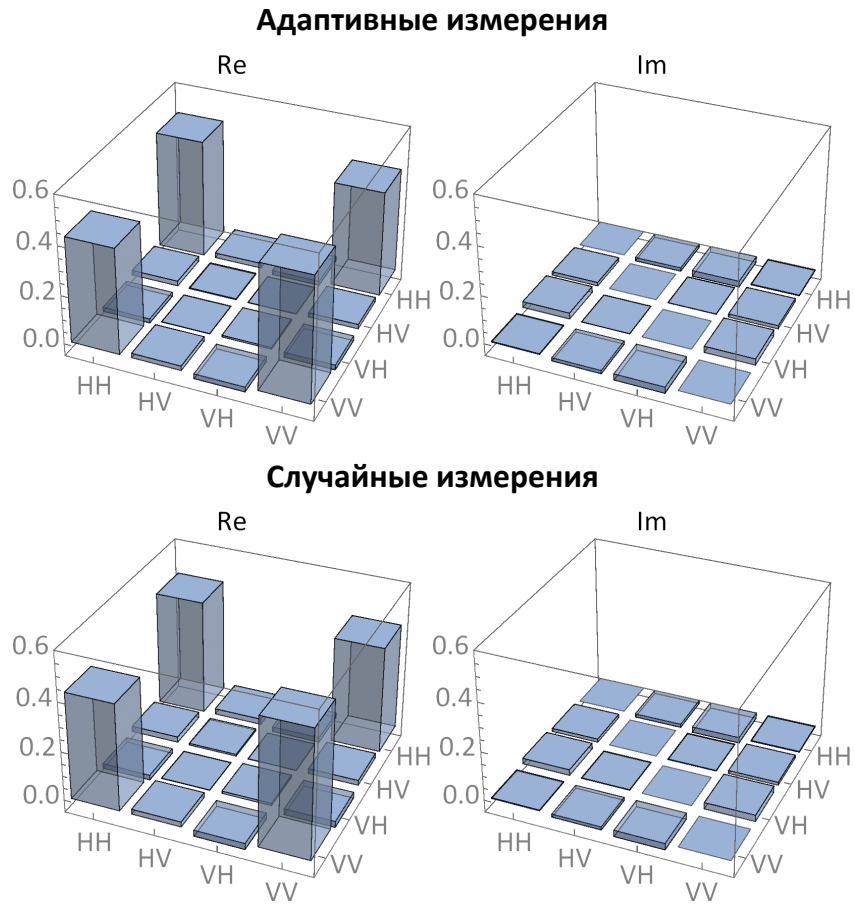


Рис. 16: То же, что на рис. 13 только для томографии белловского состояния $(|HH\rangle + |VV\rangle)/\sqrt{2}$.

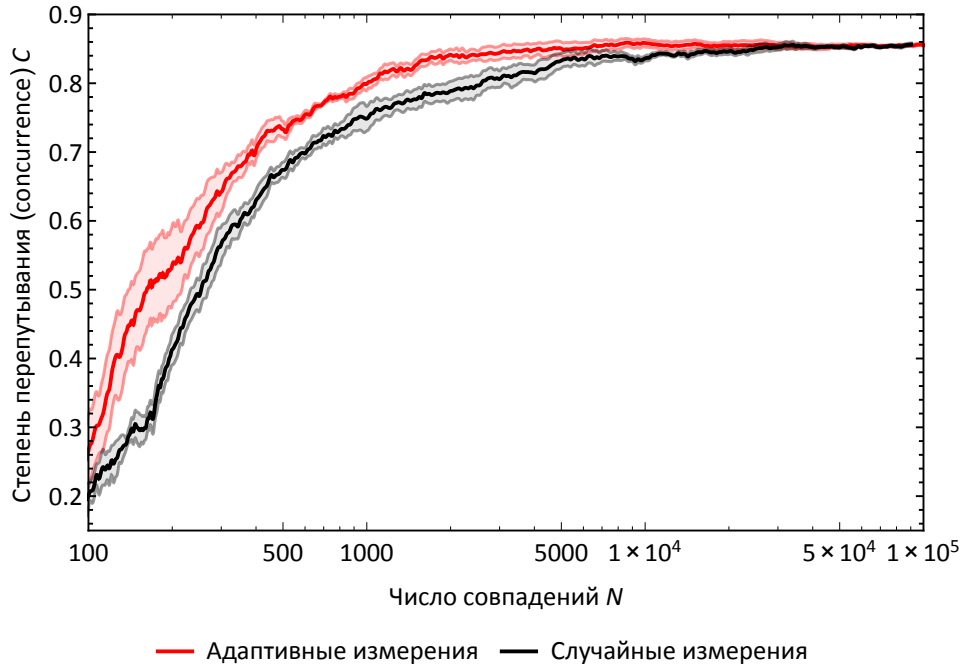


Рис. 17: Экспериментальная зависимость степени перепутывания C (concurrence) от числа зарегистрированных событий N при томографии белловского состояния $(|HH\rangle + |VV\rangle)/\sqrt{2}$.

как проявляется при численном моделировании алгоритма томографии, в котором в качестве истинного состояния взято состояние, полученное из эксперимента (см. рис. 18). Дальнейшие симуляции выявили, что значение N , при котором появляется замедление скорости сходимости, зависит от чистоты состояния. Эффект замедления наблюдается только если истинное состояние имеет ранг 3 или 4. Причины данного поведения в настоящий момент выясняются.

8 Выводы

Собрана экспериментальная установка на основе схемы с двумя нелинейными кристаллами, которая позволяет получать перепутанные состояния поляризационных кварцов. Проведена томография двух состояний: факторизованного $|HH\rangle$ и перепутанного белловского $(|HH\rangle + |VV\rangle)/\sqrt{2}$. Полученные результаты позволяют утверждать, что процедура адаптивной байесовской томографии даёт лучшую точность восстановления по сравнению со стратегией случайных измерений. Однако, было обнаружено замедление скорости сходимости для адаптивного метода, проявляемое не

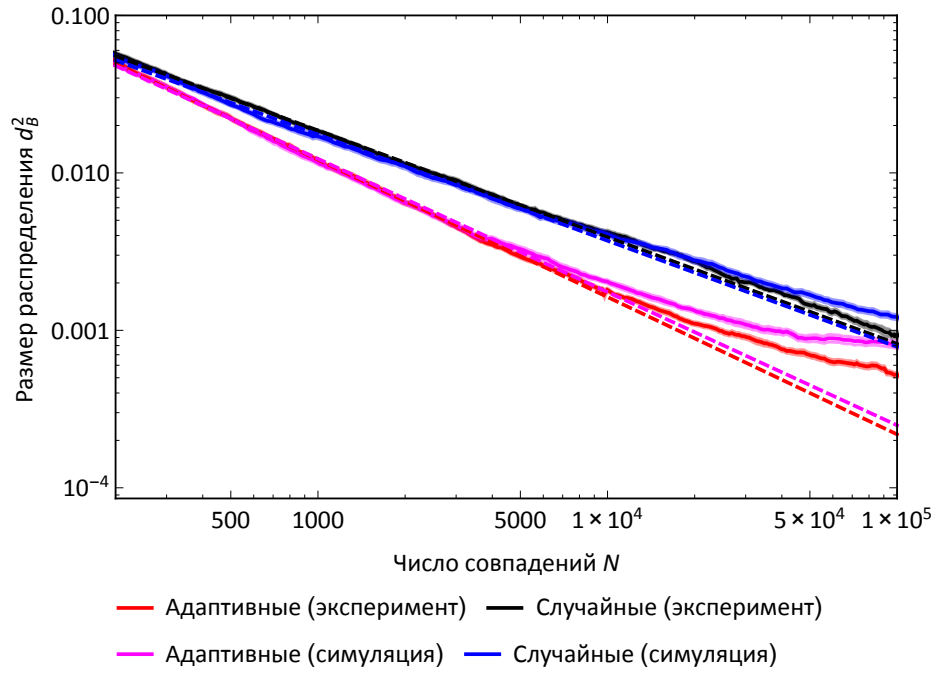


Рис. 18: Сравнение зависимостей размера распределения от числа зарегистрированных совпадений $d_B^2(N)$, полученных в ходе эксперимента по томографии состояния $|HH\rangle$ и на основе численного моделирования. При моделировании в качестве истинного состояния указано финальное состояние, найденное в результате одного из проходов экспериментальной адаптивной томографии. Для адаптивного метода наблюдается замедление скорости сходимости в обоих случаях.

только в эксперименте, но и в результатах численного моделирования. В дальнейших планах выяснение причины этого явления.

Список литературы

- [1] F. E. Huszár and N. M. T. Houlby. Adaptive Bayesian quantum tomography. *Phys. Rev. A*, 85:052120, 2012.
- [2] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2001.
- [3] Daniel F. V. James, Paul G. Kwiat, William J. Munro, and Andrew G. White. Measurement of qubits. *Phys. Rev. A*, 64:052312, Oct 2001.
- [4] R. Blume-Kohout. Optimal, reliable estimation of quantum states. *New Journal of Physics*, 12(4):043034, 2010.
- [5] Z. Hradil. Quantum-state estimation. *Phys. Rev. A*, 55:R1561–R1564, Mar 1997.
- [6] Jaroslav Řeháček, Berthold-Georg Englert, and Dagomir Kaszlikowski. Minimal qubit tomography. *Phys. Rev. A*, 70:052321, Nov 2004.
- [7] Mark D. de Burgh, Nathan K. Langford, Andrew C. Doherty, and Alexei Gilchrist. Choice of measurement sets in qubit tomography. *Phys. Rev. A*, 78:052122, Nov 2008.
- [8] D. H. Mahler, Lee A. Rozema, A. Darabi, C. Ferrie, R. Blume-Kohout, and A.M. Steinberg. Adaptive quantum state tomography improves accuracy quadratically. *arXiv*, [quant-ph]:1303.0436, 2013.
- [9] R. Blume-Kohout and P. Hayden. Accurate quantum state estimation via “keeping the experimentalist honest”. *arXiv*, [quant-ph]:0603116, 2006.
- [10] A. Uhlmann. The “transition probability” in the state space of a $*$ -algebra. *Rep. Math. Phys.*, 9:273 – 279, 1976.
- [11] Dietmar G. Fischer, Stefan H. Kienle, and Matthias Freyberger. Quantum-state estimation by self-learning measurements. *Phys. Rev. A*, 61:032306, Feb 2000.
- [12] Christopher E. Granade, Christopher Ferrie, Nathan Wiebe, and D. G. Cory. Robust online Hamiltonian learning. *New Journal of Physics*, 14(10):103013, 2012.

- [13] K. S. Kravtsov, S. S. Straupe, I. V. Radchenko, N. M. T. Houlby, and S. P. Kulik. Experimental adaptive Bayesian tomography. *arXiv*, [quant-ph]:1303.1792, 2013.
- [14] Takanori Sugiyama, Peter S. Turner, and Mio Murao. Adaptive experimental design for one-qubit state estimation with finite data based on a statistical update criterion. *Phys. Rev. A*, 85:052107, 2012.
- [15] S. Massar and S. Popescu. Optimal extraction of information from finite quantum ensembles. *Phys. Rev. Lett.*, 74:1259–1263, 1995.
- [16] E. Bagan, M. A. Ballester, R. D. Gill, A. Monras, and R. Muñoz Tapia. Optimal full estimation of qubit mixed states. *Phys. Rev. A*, 73:032301, Mar 2006.
- [17] W. K. Wootters and B. D. Fields. Optimal state-determination by mutually unbiased measurements. *Annals of Physics*, 191(2):363 – 381, 1989.
- [18] R. B. A. Adamson and A. M. Steinberg. Improving quantum state estimation with mutually unbiased bases. *Phys. Rev. Lett.*, 105:030406, 2010.
- [19] Ю. И. Богданов, А. К. Гавриченко, К. С. Кравцов, С. П. Кулик, Е. В. Морева и А. А. Соловьев. Статистическое восстановление смешанных состояний поляризационных кубитов. *ЖЭТФ*, 140:224 – 235, 2011.
- [20] Paul G. Kwiat, Edo Waks, Andrew G. White, Ian Appelbaum, and Philippe H. Eberhard. Ultrabright source of polarization-entangled photons. *Phys. Rev. A*, 60:R773–R776, Aug 1999.
- [21] Giacomo Mauro D’Ariano, Paolo Mataloni, and Massimiliano F. Sacchi. Generating qudits with $d=3,4$ encoded on two-photon states. *Phys. Rev. A*, 71:062337, Jun 2005.
- [22] С. С. Страупе и С. П. Кулик. К вопросу о приготовлении перепутанных пар поляризационных кубитов в частотно-невыврожденном режиме. *ЖЭТФ*, 137:211–219, 2010.
- [23] W. K. Hastings. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*, 57(1):97–109, 1970.
- [24] Michael J.W. Hall. Random quantum correlations and density operator distributions. *Phys. Lett. A*, 242(3):123 – 129, 1998.

- [25] K. R. W. Jones. Principles of quantum inference. *Annals of Physics*, 207(1):140–170, 1991.
- [26] W. K. Wootters. Random quantum states. *Foundations of Physics*, 20(11):1365–1378, 1990.
- [27] Karol Życzkowski and Hans-Jürgen Sommers. Induced measures in the space of mixed quantum states. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 34:7111–7125, 2001.
- [28] Donald Bures. An extension of Kakutani’s theorem on infinite product measures to the tensor product of semifinite w^* -algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 135:199 – 212, 1969.
- [29] Herman Chernoff. A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23(4):493–507, 12 1952.
- [30] K. M. R. Audenaert, J. Calsamiglia, R. Muñoz Tapia, E. Bagan, Ll. Masanes, A. Acín, and F. Verstraete. Discriminating states: The quantum Chernoff bound. *Phys. Rev. Lett.*, 98:160501, Apr 2007.
- [31] J. Calsamiglia, R. Muñoz Tapia, Ll. Masanes, A. Acín, and E. Bagan. Quantum Chernoff bound as a measure of distinguishability between density matrices: Application to qubit and Gaussian states. *Phys. Rev. A*, 77:032311, Mar 2008.
- [32] M. A. Hübner. Explicit computation of the Bures distance for density matrices. *Phys. Rev. A*, 163:239 – 242, 1992.
- [33] V. Al. Osipov, H.-J. Sommers, and K. Życzkowski. Random Bures mixed states and the distribution of their purity. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 43(5):055302, 2010.
- [34] Jean Ginibre. Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices. *Journal of mathematical physics*, 6:440–449, 1965.
- [35] Karol Życzkowski and Marek Kus. Random unitary matrices. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 27:4235–4245, 1994.
- [36] Marcin Pozniak, Karol Życzkowski, and Marek Kus. Composed ensembles of random unitary matrices. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 31(3):1059, 1998.

- [37] Francesco Mezzadri. How to generate random matrices from the classical compact groups. *Notices of the AMS*, 54:592–604, 2007.
- [38] Amir Kalev and Itay Hen. Optimized tomography for pure quantum states. *arXiv*, [quant-ph]:1409.1952, 2014.
- [39] L. Ricc, M. Weidenmüller, T. Esslinger, A. Hemmerich, C. Zimmermann, V. Vuletic, W. König, and T. W. Hänsch. A compact grating-stabilized diode laser system for atomic physics. *Optics Communications*, 117:541–549, 1995.
- [40] C. J. Hawthorn, K. P. Weber, and R. E. Scholten. Littrow configuration tunable external cavity diode laser with fixed direction output beam. *Review of scientific instruments*, 72:4477–4479, 2001.
- [41] Giorgio Brida, Maria Chekhova, Marco Genovese, and Leonid Krivitsky. Generation of different Bell states within the spontaneous parametric down-conversion phase-matching bandwidth. *Phys. Rev. A*, 76:053807, Nov 2007.
- [42] W. K. Wootters. Entanglement of formation and concurrence. *Quantum Information and Computation*, 1:27–44, 2001.