

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Физический Факультет

На правах рукописи

Бобров Иван Борисович

**Пространственные корреляции в бифотонных и  
классических полях**

01.04.21 – Лазерная физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Кулик Сергей Павлович

Москва – 2017

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Томография углового спектра бифотонного поля</b> . . . . .	14
1.1. Разложение Шмидта . . . . .	14
1.2. Квантовая томография с возможностью самокалибровки . . . . .	19
1.3. Экспериментальное наблюдение разложения Шмидта для бифотонного поля . . . . .	24
1.4. Наблюдение «скрытых» изображений и «скрытой» интерференции мод Шмидта . . . . .	33
1.5. Восстановление собственных значений разложения Шмидта методом самокалибрующей томографии . . . . .	35
1.6. Выводы к первой главе . . . . .	38
<b>Глава 2. Томография пространственного спектра теплового поля</b> 40	
2.1. Квази-разложение Шмидта в классическом тепловом поле . . . . .	40
2.2. Модель Шелла для квазитеплового источника. Разложение по когерентным модам. . . . .	42
2.3. «Скрытые» изображения в классических и квантовых полях . . . . .	46
2.4. Расчет корреляционной функции второго порядка в дальней зоне дифракции . . . . .	51
2.5. Экспериментальная установка . . . . .	53
2.6. Результаты измерений . . . . .	55
2.7. Обсуждение результатов . . . . .	65
2.8. Выводы по второй главе . . . . .	67
<b>Глава 3. Томография детектора пространственных мод</b> . . . . .	69
3.1. Генерация и детектирование пространственных мод . . . . .	70
3.2. Экспериментальная установка . . . . .	75

3.3. Выводы к третьей главе . . . . .	79
<b>Глава 4. Интерференция бифотонных полей в схеме Юнга . . . . .</b>	<b>80</b>
4.1. Теоретическое описание . . . . .	81
4.2. Приготовление квантовых состояний . . . . .	90
4.3. Экспериментальное наблюдение пространственных корреляций в схеме Юнга . . . . .	92
4.4. Обсуждение результатов . . . . .	97
4.5. Выводы к четвертой главе . . . . .	99
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>101</b>
<b>Список сокращений и условных обозначений . . . . .</b>	<b>102</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>103</b>

# Введение

## **Актуальность темы исследования.**

На сегодняшний день большой интерес представляют квантовые системы высокой размерности. Под размерностью квантовой системы здесь и далее в тексте диссертационной работы подразумевается размерность гильбертова пространства состояний этой системы. Так, например, для квантового бита информации (кубита) данная размерность равна двум. Кубит является ключевым элементом в области квантовой связи и квантовой информации. Системы с размерностью гильбертова пространства состояний больше двух часто называют кудитами. В диссертационной работе рассматриваются только оптические кудиты, наиболее удобные при использовании в задачах передачи информации. Твердотельные, сверхпроводящие, а также квантовые системы на основе холодных атомов и ионов в диссертации не рассматриваются.

В настоящее время наибольшее прикладное применение из области квантовой информации имеет направление квантовой криптографии. Помимо лабораторных образцов имеются также коммерчески доступные системы. Основными характеристиками квантовой криптографической системы являются критический уровень ошибок (по сути дальность линии связи, на которой система еще считается секретной) и скорость генерации совместного ключа. Все коммерческие системы, в силу относительной простоты реализации, используют кодирование на поляризационных или фазовых кубитах. Вместе с тем, как это было показано в работах [1–3], кодирование на основе кудитов обладает большей информационной емкостью, что увеличивает дальность передачи или увеличивает скорость распределения секретного ключа в число раз, пропорциональное размерности кудита.

Задача генерации квантовых систем высокой размерности является одной из ключевых в квантовой оптике. Одним из наиболее перспективных путей ее решения является использование непрерывных степеней свободы фотона, та-

ких как волновой вектор (пространственные кудиты) или частота. В качестве источника пространственных кудитов хорошо подходит процесс спонтанного параметрического рассеяния (СПР) [4]. В силу закона сохранения импульса в данном процессе ярко выражены корреляции рождаемых бифотонных пар по угловому направлению (попиксельное перепутывание) [5].

С практической точки зрения, для получения высокой чистоты многомерного квантового состояния, необходимо собирать генерируемое в процессе СПР излучение с малых телесных углов. Это, в свою очередь, ведет к уменьшению полезного сигнала, эффективность которого составляет в среднем  $10^2$  бифотонов на милливатт накачки [6]. После подробного исследования спектра СПР оказалось [7], что эффективность генерируемого пространственного квантового состояния, с сохранением его высокой чистоты, может быть сильно увеличена, если собирать излучение из определенных пространственных мод, называемых модами Шмидта. При выполнении определенных экспериментальных условий данные пространственные моды в хорошем приближении совпадают с поперечными модами электромагнитного поля (ТЕМ) в свободном пространстве. В зависимости от выбора базиса поперечные пространственные моды можно разделить на моды Эрмита-Гаусса (при выборе декартовой системы координат) и на моды Лагерра-Гаусса (при выборе полярных координат). В более общей классификации моды Эрмита-Гаусса (ЭГ) и Лагерра-Гаусса (ЛГ) являются частными случаями пространственных мод Инса-Гаусса при выборе эллиптического базиса [8, 9].

В большинстве экспериментальных работах, использующих базис мод ЛГ, исследуются свойства перепутанности системы по орбитальному угловому моменту, радиальный индекс чаще всего не рассматривается [2, 10]. Такой подход практичен с точки зрения детектирования подобных систем, так как при регистрации углового момента можно использовать упрощенный метод фазовых масок (подробное изложение метода рассматривается в третьей главе диссертации), но использование лишь азимутального индекса существенно ограничива-

ет максимальную размерность генерируемой квантовой системы. Существуют работы, показывающие что квантовые системы с перепутыванием по орбитальному угловому моменту становятся более устойчивы в турбулентной атмосфере с ростом углового момента [11]. Также существуют исследования, демонстрирующие возможность переноса перепутанности системы с поляризационных степеней свободы фотона на его угловой момент.

В диссертационной работе в основном используется базис мод Эрмита-Гаусса по причине удобства генерации и детектирования при наличии активной фазовой маски. Несмотря на использование базиса мод ЭГ все полученные результаты могут быть перенесены на случай базисных мод Лагерра-Гаусса.

При построении экспериментальной установки перед проведением измерений ее необходимо откалибровать. Процедура калибровки такой установки на однофотонном уровне является сложной экспериментальной задачей, в которой обычно требуется наличие эталонных однофотонных источников и откалиброванных приемников. На сегодняшний день изготовление однофотонных источников (которые бы детерминистическим образом испускали строго определенное число фотонов) является открытой экспериментальной задачей квантовой оптики. Идея абсолютной калибровки детекторов, без использования эталонного источника или эталонного детектора принадлежит Давиду Николаевичу Клышко [12]. Предложенный метод базируется на использовании источника бифотонных пар на основе спонтанного параметрического рассеяния. Используя тот факт, что в процессе СПР фотоны рождаются строго парами при наличии схемы совпадений можно измерить квантовую эффективность детектора без использования эталонного детектора [13–16]. Данные эксперименты положили начало направлению самокалибрующихся методик, позволяющих получать информацию как о детектируемом состоянии, так и о характеристиках самого детектора [17, 18]. Например, в экспериментальной работе [19] была реализована самокалибрующаяся схема, позволяющая одновременно восстанавливать угол поворота базиса измерений и матрицу плотности измеряемых поля-

ризационных состояний, в данной работе исследовались одно и двухфотонные поляризационные состояния. Использование самокалибрующихся методик для восстановления пространственных состояний квантовых полей на сегодняшний день в литературе не упоминается.

Одним из активных применений пространственно перепутанных пар фотонов, рождаемых в процесс СПР является наблюдение «скрытых» изображений [20]. Развитая экспериментальная база в настоящее время позволяет в реальном времени получать «скрытые» изображения с контрастом более 90%, при помощи камеры, работающей в режиме регистрации одиночных фотонов [21], что может быть использовано для создания чувствительных оптических сенсоров высокого разрешения. Термин «скрытые» используется потому, что характерные пространственные распределения (изображения) возможно наблюдать лишь в корреляционной функции второго порядка по интенсивности, в то время как само распределение интенсивности не содержит никаких пространственных черт изображения. Кроме того, при восстановлении «скрытых» изображений часть излучения, используемого для восстановления, не взаимодействует непосредственно с объектом изображения (подобно опорной световой волне лазера при воспроизведении голограмм).

До недавнего времени велись бурные научные исследования с целью определить, является ли наблюдение «скрытых» изображений исключительно квантовой особенностью пространственно перепутанных фотонов, или данный эффект может быть полностью воссоздан с использованием классических полей. Первые теоретические обоснования эффекта «скрытых» изображений [22] основывались на том, что именно перепутывание играет основную роль при извлечении информации о пространственных корреляциях. Данная точка зрения была опровергнута после публикации теоретической работы [23] и экспериментальных исследований [24, 25], демонстрирующих, что практически любое «скрытое» изображение может быть воссоздано с использованием только классических источников обладающих корреляционными свойствами. Таким образом

было показано [23], что различие между наблюдаемыми «скрытыми» изображениями от бифотонного или классического (квазитеплого) источника заключается только в видности регистрируемого изображения. В отличие от большого числа экспериментальных и теоретических работ, исследующих «скрытые» изображения объектов, в основе которых по сути лежат попиксельные корреляции, рассмотренные ранее, работ, посвященных изучению пространственных корреляций между поперечными модами квазитепловых источников существует очень немного. Теоретически данные корреляционные свойства были предсказаны еще в 1982 году [26], однако, проведение экспериментальных исследований и сравнение результатов с разложением Шмидта для бифотонного поля до настоящего момента выполнено не было.

Тематика поперечных пространственных распределений (мод) как квантовых, так и квазиклассических световых полей является относительно новой, поэтому вопрос о том как наилучшим образом генерировать и производить детектирование пространственных состояний является крайне важным на сегодняшний день [27]. Наиболее практичным методом является использование активных фазовых голограмм [28], управление которыми может осуществляться в реальном времени непосредственно в ходе эксперимента [29]. Для восстановления отклика детектора пространственных мод на различные входные распределения поля основополагающим является применение методов квантовой томографии детекторов [30–32]. Базируясь на методах, используемых в перечисленных работах, в диссертации рассматривается оригинальный подход, позволяющий восстановить отклик детектора пространственных мод на заданную входную моду  $HG_{nm}$ , при том, что сама входная пространственная мода  $HG_{nm}$  в чистом виде не готовится, вместо нее на вход детектора подается смещенная в поперечном направлении мода  $HG_{00}$ . Выбор такого необычного входного состояния приводит к появлению спектра входных мод в базисе собственных мод детектора, однако, с экспериментальной точки зрения, данный подход позволяет избежать ошибок связанных с приготовлением мод  $HG_{nm}$  высокого порядка,

и восстановить только отклик детектора, а не отклик системы: генератор пространственной моды + детектор пространственной моды.

Помимо исследования спектра пространственных мод бифотонного поля отдельный как фундаментальный, так и практический интерес представляет квантовая интерференция бифотонных полей. В отличие от классических экспериментов, в которых характерная интерференционная картина наблюдается в распределении интенсивности, при попадании многофотонных (в простейшем случае бифотонных) полей на вход интерферометра, пространственное распределение корреляционной функции второго порядка по интенсивности  $G^2 = \langle I_1(x_1, y_1)I_2(x_2, y_2) \rangle$  устроено более сложным образом [33]. Чаще всего работы по квантовой интерференции базируются на схеме Хонг-У-Манделя [34], в которой поперечные координаты  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  фиксированы, либо производится дополнительная пространственная фильтрация излучения при помощи одномодовых волокон. Изучение же поперечной пространственной структуры  $G^2$  является важной задачей для таких направлений как квантовая литография [35] и квантовая метрология [36, 37]. Оба направления используют свойство сверхразрешения [38], при котором разрешение оптической системы не ограничивается ее дифракционным пределом если на вход системы подаются многофотонные квантовые состояния.

### **Цели и задачи диссертационной работы:**

#### **Цели исследования:**

- Экспериментальное исследование пространственных мод и нахождение соответствующих им собственных значений разложения Шмидта для бифотонного поля, генерируемого в процессе спонтанного параметрического рассеяния, с применением методов самокалибрующей томографии.
- Изучение пространственных корреляционных свойств квазитеплого поля в базисе мод Эрмита-Гаусса и сравнение полученных результатов с разложением Шмидта для случая бифотонного поля.

- Томография детектора пространственных мод и нахождение оптимальных фазовых голограмм для детектирования в базисе мод Эрмита-Гаусса.
- Изучение квантовых интерференционных пространственных распределений, возникающих при использовании бифотонного источника в схеме Юнга.

### **Задачи исследования:**

- Создать экспериментальную установку, реализующую проекционные измерения углового спектра бифотонного поля в базисе мод Эрмита-Гаусса.
- Проанализировать полученное в эксперименте разложение по пространственным модам и сравнить его с теоретическим разложением Шмидта.
- Создать экспериментальную установку, позволяющую измерять пространственные корреляционные зависимости от квазитеплого источника излучения.
- Провести анализ полученных корреляционных зависимостей, исследовать их согласие с теоретической моделью Шелла для тепловых полей.
- Создать экспериментальную установку и провести измерения для калибровки детектора поперечных пространственных мод.
- Создать установку для генерации двухфотонных состояний с возможностью плавной перестройки состояния, поступающего на вход интерферометра Юнга.
- Создать установку для наблюдения квантовой интерференции; получить характерные интерференционные зависимости в корреляционной функции второго порядка по интенсивности; пронаблюдать уменьшение периода интерференции в 2 раза по сравнению с классической интерференцией в схеме Юнга.

### **Научная новизна.**

- Впервые исследованы пространственные корреляционные свойства углового спектра бифотонного поля в базисе мод Эрмита-Гаусса с применением методов самокалибрующейся томографии.
- Впервые изучены пространственные корреляционные зависимости в базисе мод Эрмита-Гаусса для квазитеплого источника излучения.
- Разработан оригинальный метод калибровки детектора пространственных мод. Впервые восстановлено POVM разложение для детектора пространственных мод.
- Впервые продемонстрирована устойчивость квантовой интерференционной картины для входного состояния  $|1, 1\rangle$  при внесении дополнительной фазовой задержки в один из источников интерферометра Юнга.

### **Теоретическая и практическая значимость.**

Полученные результаты по исследованию корреляций в пространственных поперечных модах от квантового источника могут быть использованы при создании систем квантового распределения ключа с использованием оптических кудитов. Применение многомерных носителей информации может увеличить скорость генерации ключа, а так же повысить дальность секретной связи для используемых криптографических протоколов.

Результаты по изучению пространственных корреляционных свойств квазитепловых источников представляют в основном фундаментальный интерес, но также могут быть применены при регистрации «скрытых» изображений объектов находящихся в поле с тепловой статистикой излучения.

Детектор пространственных мод является важным элементом как классических, так и квантовых систем, использующих кодирование на пространственных модах. Оригинальный метод калибровки таких детекторов, а также результаты по выбору оптимальных фазовых голограмм для данных детекторов

могут найти широкое применение в классической и квантовой связи, например, в современных задачах передачи пространственных состояний через многомодовые или фотонно-кристаллические оптические световоды, или задачах связи через атмосферный канал.

Полученные результаты квантовых интерференционных зависимостей полученных для бифотонного входного состояния в схеме Юнга могут быть применены в схемах квантовой литографии, также при создании высокочувствительных сенсоров с высоким разрешением для задач метрологии и спектроскопии.

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Применение методов самокалибрующейся томографии позволяет повысить точность восстановления квантовых состояний по значениям проекций и одновременно выявить систематические погрешности эксперимента.
2. Качественное поведение пространственных корреляций  $g^{(2)}$  квазитеплового источника такой же, как для случая бифотонного поля, генерируемого в процессе спонтанного параметрического рассеяния.
3. Предложенный и апробированный метод калибровки детектора пространственных мод Эрмита-Гаусса позволяет использовать только фундаментальную моду на входе для получения отклика на моды высших порядков.
4. Использование фазовых голографических масок с дополнительной амплитудной модуляцией приближает измерения детектора пространственных мод к идеальным проекциям в базисе мод Эрмита-Гаусса.
5. Квантовая интерференционная картина, полученная при входном состоянии  $|1, 1\rangle$  в схеме Юнга, обладает удвоенным периодом по сравнению с классическим входным состоянием и не чувствительна к разности фаз между двумя источниками схемы Юнга.

### **Степень достоверности и апробация результатов.**

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

Бобров И.Б., Страупе С.С., Ковлаков Е.В., Кулик С.П. Пространственные корреляции в квази-тепловом свете // VIII семинар памяти Д.Н. Клышко. – 20-23 мая 2013. – Москва, Россия.

Bobrov I.B., Kovlakov E.V., Markov A.A., Straupe S.S., Kulik S.P. Detector tomography of spatial mode filters // 23rd International Laser Physics Workshop LPHYS'14. – 14-18 July 2014. – Sofia, Bulgaria.

Bobrov I.B., Kalashnikov D.A., Krivitsky L.A. Imaging of spatial correlations of two-photon states // 21th central European workshop on quantum optics CEWQO. – 23-27 June 2014. – Brussels, Belgium.

Бобров И.Б., Ковлаков Е.В., Марков А.А., Страупе С.С., Кулик С.П. Томография детектора пространственных мод // IX семинар памяти Д.Н. Клышко. – 25-27 мая 2015. – Москва, Россия.

### **Публикации.**

Основные результаты диссертации опубликованы в 5 статьях в рецензируемых журналах, входящих в список ВАК [39], [40], [41] [42], [43].

### **Личный вклад автора.**

Изложенные в работе результаты исследований получены лично автором или в соавторстве при его значительном вкладе. Автор принимал участие в постановке задач, теоретических расчетах, планировании и выполнении экспериментов, представленных в диссертации.

### **Структура и объем диссертации.**

Диссертация состоит из введения, четырех оригинальных глав, заключения и списка литературы. Обзор литературы выполнен внутри каждой главы. Общий объем диссертации 110 страниц, из них 97 страницы текста, включая 57 рисунков. Библиография включает 93 наименования на 8-ми страницах.

## Томография углового спектра бифотонного поля

### 1.1. Разложение Шмидта

Процесс спонтанного параметрического рассеяния (СПР) [4] является одним из основных источников перепутанных фотонных пар для экспериментов в области квантовой оптики, также данный процесс активно используется в квантовой криптографии, при построении схем квантовых вычислений и во многих других экспериментальных и теоретических направлениях. В то время, как в квантовой криптографии и в схемах квантовых вычислений в основном используют дискретные степени свободы фотона (его поляризацию), отдельный интерес представляет использование непрерывных степеней свободы перепутанных пар фотонов. В качестве таких степеней могут выступать, например, частота или угловой спектр фотонов бифотонной пары. С точки зрения информационной емкости квантового состояния системы с непрерывными степенями свободы обладают большим преимуществом перед системами с дискретными, так как имеют, в теории, бесконечномерное гильбертово пространство состояний (например, при работе с поляризационными степенями свободы, размерность гильбертова пространства равна двум).

В данной главе рассматриваются непрерывные степени свободы – изучается угловой спектр бифотонной пары, рождаемой в процессе СПР. Процесс спонтанного параметрического рассеяния имеет эффективный гамильтониан взаимодействия вида [44]:

$$H = \int_V d^3\vec{r} \chi^{(2)}(\vec{r}) E_p^{(-)}(\vec{r}) E^{(+)}(\vec{r}) E^{(+)}(\vec{r}) + \text{H.c.} \quad (1.1)$$

Здесь  $E_p$  – классическая амплитуда поля накачки,  $E$  – оператор рассеяния. Полагая поле накачки монохроматическим в первом порядке теории возмущения

волновая функция процесса СПР может быть записана как:

$$|\Psi\rangle = |\text{vac}\rangle + \int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \Psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) |1\rangle_{k_1} |1\rangle_{k_2}, \quad (1.2)$$

$$\Psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \int_V d^3\vec{r} \chi^{(2)}(\vec{r}) E_p^{(-)}(\vec{r}) \exp(i\vec{\Delta}\vec{r}),$$

где отстройка  $\vec{\Delta} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_p$  и из закона сохранения энергии следует, что  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_p$ . В случае приближения бесконечного кристалла и плоской падающей волны накачки амплитуда бифотонного поля представляется в упрощенной форме[45–47]:

$$\Psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \varepsilon_p(\vec{k}_{1\perp} + \vec{k}_{2\perp}) F(\vec{k}_{1\perp} - \vec{k}_{2\perp}), \quad (1.3)$$

в данном выражении функция  $\varepsilon_p(\vec{k}_{1\perp} + \vec{k}_{2\perp})$  отвечает за угловой спектр поля накачки, а  $F(\vec{k}_{1\perp} - \vec{k}_{2\perp})$  – геометрический форм-фактор, возникающий из условия фазового синхронизма в нелинейном кристалле. Явный вид функции  $F$  для предположений бесконечного в поперечном направлении кристалла и плоской волны накачки может быть найден аналитически [46, 47]

$$\Psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = N\varepsilon_p(\vec{k}_{1\perp} + \vec{k}_{2\perp}) \text{sinc} \left[ \frac{L(\vec{k}_{1\perp} - \vec{k}_{2\perp})^2}{4k_p} \right], \quad (1.4)$$

здесь  $L$  – длина кристалла, а  $N$  – нормировочная константа.

Наиболее широко используемым подходом для исследования пространственного или частотного перепутывания бифотонных пар, рожденных в процессе СПР, является подход основанный на разложении по когерентным модам. Формально любую гладкую непрерывную функцию от двух переменных, которой в данном случае является угловая амплитуда бифотона, можно представить в виде разложения по базисным функциям  $\xi_k(x)$ :

$$\Psi(\vec{k}_{1\perp}, \vec{k}_{2\perp}) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_{i,j} \xi_i(\vec{k}_{1\perp}) \xi_j(\vec{k}_{2\perp}). \quad (1.5)$$

В силу наличия двух аргументов у функции  $\Psi(\vec{k}_{1\perp}, \vec{k}_{2\perp})$  в этом выражении суммирование производится по двум индексам. Наличие явных корреляций между

фотонами бифотонной пары и их структура при такой записи не являются очевидными. Оказывается, существует физически выделенный базис, в котором двойное суммирование может быть сведено к одинарному:

$$\Psi(\vec{k}_{1\perp}, \vec{k}_{2\perp}) = \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \psi_i(\vec{k}_{1\perp}) \psi_i(\vec{k}_{2\perp}). \quad (1.6)$$

Это разложение носит название разложения Шмидта, в нем базисные функции  $\psi_i(\vec{k}_{1,2\perp})$  являются собственными функциями однофотонных матриц плотности  $\rho_{1,2}(\vec{k}_{1,2\perp}, \vec{k}'_{1,2\perp})$  с соответствующими собственными значениями  $\lambda_i$ . Явный вид собственных функций может быть получен из решения системы интегральных уравнений:

$$\int \rho_{1,2}(\vec{k}_{1,2\perp}, \vec{k}'_{\perp}) \psi_i(\vec{k}'_{\perp}) d\vec{k}'_{\perp} = \lambda_i \psi_i(\vec{k}_{1,2\perp}). \quad (1.7)$$

С математической точки зрения суммирование в разложении Шмидта должно производиться по бесконечному числу базисных мод, однако, физически значимым является лишь ограниченное число этих мод  $K$  [7]:

$$K = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^2}, \quad (1.8)$$

данное число также носит название числа Шмидта, и определяет перепутанность квантовой системы [48–50].

Степень перепутанности системы, заданной выражением (1.4), подробно исследовалась в теоретической работе [7]. Полагая угловой спектр поля накачки гауссовой функцией  $\varepsilon_p = \exp\left[-\frac{|\vec{k}_{1\perp} + \vec{k}_{2\perp}|^2}{\sigma^2}\right]$ , также считая  $F(\vec{k}_{1\perp} - \vec{k}_{2\perp})$  гауссовой, авторами данной работы было получено число Шмидта в аналитическом виде:

$$K_g = \frac{1}{4} \left( b\sigma + \frac{1}{b\sigma} \right)^2, \quad (1.9)$$

здесь  $b = \sqrt{\frac{L}{4k_p}}$  – полуширина гауссовой функции  $F(\vec{k}_{1\perp} - \vec{k}_{2\perp})$ . Модель предложенную в работе [7] будем далее по тексту называть двугауссовой моделью. Значение числа Шмидта  $K_g$  в данной модели определяется единственным параметром  $b\sigma$  и может принимать широкий набор значений.

Численный расчет числа Шмидта  $K$ , без приближения функции sinc в выражении (1.4) гауссовой зависимостью, показывает, что реальное значение  $K > K_b$  для всех значений параметра  $b\sigma$ .

Базисные функции разложения (1.6) не являются строго заданными и могут выбираться в зависимости от физических особенностей экспериментальной схемы. Чаще всего распространение излучения в экспериментальной схеме соответствует параксиальному приближению, в этом случае удобно использовать моды Эрмита-Гаусса (ЭГ) или Лагерра-Гаусса (ЛГ) в качестве базиса разложения. Данные моды являются решением параксиального волнового уравнения.

В текущей работе в основном используется набор базисных мод Эрмита-Гаусса, в силу удобства их экспериментального детектирования, но без ограничений общности, схожие результаты могут быть получены с использованием мод ЛГ. Моды ЭГ также называются поперечными модами электромагнитного поля (transverse electromagnetic, TEM). Обозначение TEM<sub>nm</sub> будет применяться в тексте диссертации, наряду с HG<sub>nm</sub>.

Явный вид мод ЭГ записывается в виде:

$$\text{HG}_{nm}(k_x, k_y) \propto \text{H}_n \left( \frac{k_x^2}{(\Delta k_x)^2} \right) \text{H}_m \left( \frac{k_y^2}{(\Delta k_y)^2} \right) \exp \left( -\frac{k_x^2 + k_y^2}{2(\Delta k_{\perp})^2} \right), \quad (1.10)$$

в этом выражении  $\text{H}_{n,m}(x)$  – полиномы Эрмита,  $k_x, k_y$  – координаты поперечного волнового вектора  $\vec{k}_{\perp}$ ,  $\Delta k_{x,y}$  – характерная ширина фундаментальной гауссовой моды вдоль осей  $x$  и  $y$ . Для получения разложения Шмидта (1.6) по модам ЭГ (1.10) удобно использовать двугауссову модель для амплитуды бифотонного поля [7, 51]:

$$\Psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \propto \exp \left( -\frac{(\vec{k}_{1\perp} + \vec{k}_{2\perp})^2}{2a^2} \right) \exp \left( -\frac{(\vec{k}_{1\perp} - \vec{k}_{2\perp})^2}{2b^2} \right), \quad (1.11)$$

здесь  $a$  соответствует угловой ширине поля накачки, а  $b = \sqrt{\frac{4k_p}{\gamma L}}$  отвечает за угловую ширину фазового синхронизма в кристалле. Как уже отмечалось выше, данная модель (1.11) является приближением  $\text{sinc} \left( \frac{x^2}{\sigma^2} \right) \rightarrow \exp \left( -\gamma \frac{x^2}{\sigma^2} \right)$  при

малых значениях  $\sigma$ , здесь параметр  $\gamma$  отвечает за "близость" этих функций. В работе [51] было показано, что наилучшее приближение выполняется при  $\gamma = 0.86$ .

В силу того, что волновая функция представима в виде произведения гауссовых функций зависящих только от  $k_{1,2x}$  или  $k_{1,2y}$ , для упрощения математических выкладок можно рассматривать только одномерную задачу, в этом случае

$$\Psi(k_{1x}, k_{2x}) \propto \exp\left(-\frac{(k_{1x} + k_{2x})^2}{2a^2}\right) \exp\left(-\frac{(k_{1x} - k_{2x})^2}{2b^2}\right). \quad (1.12)$$

Можно показать, как это было проделано в работе [51], что системе уравнений (1.7) удовлетворяет решение вида:

$$\psi_n(k_{1x,2x}) = \left(\frac{2}{ab}\right)^{\frac{1}{4}} \phi_n\left(\sqrt{\frac{2}{ab}}k_{1x,2x}\right), \quad (1.13)$$

где  $\phi_n(x) = (2^n! \sqrt{\pi})^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x)$ . Собственные значения и число Шмидта, получаемые при решении (1.7) равны

$$\lambda_n = 4ab \frac{(a-b)^{2n}}{(a+b)^{2(n+1)}}, \quad K_x = \frac{a^2 + b^2}{2ab}. \quad (1.14)$$

Итоговый вид амплитуды бифотона в базисе мод ЭГ представляется в виде разложения:

$$\Psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \sum_{nm} \sqrt{\lambda_n \lambda_m} \psi_n(k_{1x}) \psi_m(k_{1y}) \psi_n(k_{2x}) \psi_m(k_{2y}), \quad (1.15)$$

здесь индексы  $n$  и  $m$  отвечают за порядок моды вдоль направления  $x$  и  $y$  соответственно. Степень перепутывания этого двухчастичного волнового пакета задается полным числом Шмидта

$$K = K_x K_y = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4a^2 b^2}. \quad (1.16)$$

Степень перепутывания квантовой системы является инвариантом, и не может зависеть от выбора базиса разложения. Как это было продемонстрировано в работе [52], для выбора базисных мод в виде Эрмита-Гаусса или Лагерра-Гаусса, итоговое число Шмидта не меняется. В текущей главе изучается разложение

Шмидта для коллинеарного режима работы СПР, подобное разложение также может быть получено в неколлинеарном режиме. Явный аналитический вид разложения для неколлинеарного спектра СПР, а также степень перепутанности в таком режиме исследованы в работе [53].

Необходимо отметить, что вся вышеизложенная теория учитывает лишь гауссово распределение пространственной моды накачки. В случае использования накачки в пространственной моде ЭГ более высокого порядка, угловой спектр бифотонного поля также имеет разложение Шмидта, где базисными функциями разложения выступают моды Эрмита-Гаусса. Явный вид этого разложения, в зависимости от падающей на кристалл пространственной моды накачки, получен в теоретической работе [54].

Целью проведенной экспериментальной работы было исследование распределения (1.15): измерение собственных значений в разложении; исследование вида базисных функций разложения. Для получения достоверных экспериментальных результатов использовались как прямые проекционные измерения в базисе мод ЭГ, так и усложненный подход самокалибрующейся томографии, позволяющий учитывать систематические погрешности экспериментальной установки.

## **1.2. Квантовая томография с возможностью самокалибровки**

Здесь и далее в главе под самокалибрующейся томографией будет подразумеваться процесс одновременного восстановления информации не только о наблюдаемом квантовом состоянии системы, но и об устройстве самого измерительного (проекционного) прибора, как это было предложено в работе [55].

При проведении реальных физических экспериментов описания процесса измерения как действие проекционного оператора на исследуемое состояние часто бывает недостаточно. Когда состояние системы после измерения неважно

(например, при измерении одиночных фотонов лавинным фотодетектором квантовое состояние фотона (поляризация, угловой момент, пространственная мода и пр.) после измерения теряет сколь-нибудь значимый физический смысл), удобным является POVM-формализм. POVM (positive-operator valued measure) положительная операторно-значная мера [56], также часто называемая разложением единицы, является мощным инструментом при анализе результатов измерений, а также при описании самого квантового измерения.

Пусть процесс измерения задан операторами  $M_j$ , а сама система до измерения находится в состоянии  $|\psi\rangle$ . Вероятность получить результат измерения  $j$  в этом случае задается формулой  $p(j) = \langle\psi|M_j^\dagger M_j|\psi\rangle$ . Пусть новый оператор имеет вид:

$$A_j \equiv M_j^\dagger M_j, \quad (1.17)$$

тогда из условия полноты и свойств линейной алгебры следует, что  $A_j$  - неотрицательный оператор и  $\sum_j A_j = I$ . Таким образом, набор операторов  $A_j$  достаточен для определения вероятностей всех различных исходов измерения. Операторы  $A_j$  - POVM-элементы, а полный набор  $A_j$  называется POVM разложением.

Если процесс измерения представлен набором проекторов  $P_j$ , из свойств проекционных операторов следует, что  $P_j P_{j'} = \delta_{j,j'} P_j$  и  $\sum_j P_j = I$ . Таким образом, только при использовании проекционных операторов все POVM-элементы совпадают с операторами измерений  $P_j$ , так как  $A_j \equiv P_j^\dagger P_j = P_j$ .

Теоретическая возможность самокалибрующейся томографии базируется на использовании правила Борна. Пусть имеется неизвестный набор параметров  $\vec{\eta}$ , описывающих неидеальность системы измерений с  $M$  возможными исходами. Тогда математически измерительная система может быть представлена в виде POVM-разложения  $A_j(\vec{\eta})$ ,  $j = 1..M$ . Аналогично, пусть вектор  $\vec{\gamma}$  задает набор неизвестных параметров, задающих неидеальность приготовления квантовой системы состоящей из  $N$  исходных состояний  $\rho_k(\vec{\gamma})$ ,  $k = 1..N$ . Состояния  $\rho_k(\vec{\gamma})$  называются самокалибровочными для данного набора POVM  $A_j(\vec{\eta})$ , если

вероятности детектирования

$$p_{jk} = \text{Tr} (A_j(\vec{\eta})\rho_k(\vec{\gamma})) \quad (1.18)$$

позволяют однозначно определить неизвестные вектора  $\vec{\eta}$  и  $\vec{\gamma}$  [55], таким образом, полностью характеризуя измерительную и приготовительную системы  $A_j$  и  $\rho_k$  соответственно.

Исходя из предложенного выше определения легко заметить, что квантовая томография состояний и квантовая томография процессов являются частными случаями квантовой самокалибрующей томографии. Так, например, располагая полным знанием об измерительной системе  $\dim(\vec{\eta}) = 0$  любое квантовое состояние может быть восстановлено. И наоборот, при полном незнании о квантовом процессе измерения  $\dim(\vec{\eta}) = M\dim(A)^2$ , данный процесс может быть восстановлен при наличии полного набора квантовых состояний. Таким образом, при проведении самокалибрующей томографии большее "незнание" о процессе измерения  $\dim(\vec{\eta})$  может быть скомпенсировано измерением большего числа состояний, и наоборот.

Зависимость POVM и приготавливаемых состояний от неизвестных векторов  $\vec{\eta}$  и  $\vec{\gamma}$  может быть как линейной, так и нелинейной. В простейшем случае линейной зависимости, вектора  $\vec{\eta}$  и  $\vec{\gamma}$  могут быть однозначно вычислены из системы линейных уравнений 1.18.

Большинство проводимых экспериментов по квантовой оптике в настоящее время имеет существенно нелинейную зависимость от обсуждаемых неизвестных параметров. Так, например, в экспериментах по гомодинному детектированию или временному мультиплексированию наблюдается сильная нелинейная зависимость от эффективности фотодетекторов. Однако, и в этом случае применение методов самокалибрующей томографии позволяет восстановить основные характеристики исследуемых квантовых процессов и состояний.

В случае нелинейной зависимости от векторов  $\vec{\eta}$  или  $\vec{\gamma}$ , точное решение нелинейной системы уравнений 1.18, вообще говоря, может и не существовать.

Не смотря на это, можно приближенно восстановить набор неизвестных параметров путем поиска наиболее "близкой" модели  $p_j$  к наблюдаемым в эксперименте вероятностям  $f_j$  (частотам регистрации интересующих событий). Например, в качестве меры "близости"  $D(\vec{p}, \vec{f})$  можно выбрать расстояние Кульбака-Лейблера [57]. Данное расстояние представляет собой неотрицательный функционал, который также является мерой удаленности двух вероятностных распределений. Следует отметить, что это расстояние не является метрикой (в нем не выполняется неравенство треугольника, также оно не симметрично по входным распределениям). Благодаря тому, что расстояние  $D(\vec{p}, \vec{f})$  строго выпукло по неизвестным векторам  $\vec{\eta}, \vec{\gamma}$ , минимизация этого расстояния позволяет определить данные вектора единственным образом, что является главным критерием самокалибрующейся томографии.

В работах [58–61] было показано, что минимизация расстояния  $D(\vec{p}, \vec{f})$ , эквивалентна использованию метода максимального правдоподобия (maximum-likelihood estimation), то есть максимизации функционала  $L$ :

$$D(\vec{p}, \vec{f}) \propto \ln(L) = \sum_j f_j \ln [p_j/P], \quad P = \sum_j p_j. \quad (1.19)$$

Использование самокалибрующейся томографии для восстановления разложения по модам Шмидта (1.6) существенно упрощается благодаря априорному знанию приготавливаемого состояния, а также благодаря проведению проекционных измерений в шмидтовском базисе. Фактически, необходимо восстанавливать диагональные элементы матрицы плотности, отвечающие однофотонным состояниям, что позволяет эффективно применять метод максимального правдоподобия.

Редуцированная матрица плотности, соответствующая одному фотону бифотонной пары может быть представлена в виде

$$\rho(\vec{k}, \vec{k}') = \sum_{n,m} \lambda_{n,m} \psi_{n,m}(\vec{k}) \psi_{n,m}(\vec{k}'), \quad (1.20)$$

в этом выражении коэффициенты  $\lambda_{n,m} = \lambda_n \lambda_m$ .

При рассмотрении самокалибрующей томографии применительно к случаю восстановления собственных значений в шмидтовском базисе (1.6) введем следующие обозначения: пусть POVM разложение, обозначенное ранее как  $A_j(\vec{\eta})$  теперь обозначается  $\Pi$ ; а вместо абстрактного вектора параметров  $\vec{\eta}$  теперь выступают параметры  $\mu_{ij}^{(nm)}$ , описывающие потери при проекционных измерениях. В этих обозначениях POVM элементы, соответствующие локальному проекционному измерению на выбранную моду Шмидта, записываются в следующей форме

$$\Pi_{n,m}(\vec{k}, \vec{k}') = \sum_{i,j} \mu_{ij}^{(nm)} \psi_{i,j}(\vec{k}) \psi_{i,j}(\vec{k}'). \quad (1.21)$$

Нахождение параметров  $\mu_{i,j}^{(nm)}$  возможно с использованием метода максимального правдоподобия [17, 62, 63], который в данном конкретном случае сводится к итерационной процедуре

$$\lambda_{nm}^{(k+1)} = \lambda_{nm}^{(k)} \sum_{i,j} \frac{f_{ij}}{p_{ij}^{(k)}} \frac{\mu_{ij}^{(nm)}}{\mu_{ij}^{sum}}, \quad (1.22)$$

где  $\mu_{ij}^{sum} = \sum_{n,m} \mu_{ij}^{nm}$ , а вероятности  $p_{ij}^{(k)}$  вычисляются согласно правилу Борна (1.18) на  $k$ -м итерационном шаге. Выбор значений  $\lambda_{nm}^{(0)}$  на нулевом шаге не так важен, главное, чтобы они были отличны от нуля. Величины  $f_{ij}$  представляют собой частоты событий, наблюдаемых в эксперименте (экспериментальные вероятности). Важной особенностью процедуры (1.22) является факторизуемость собственных значений  $\lambda_{nm}^{(k)} = \lambda_n^{(k)} \lambda_m^{(k)}$ .

Кратко самокалибрующая процедура может быть сформулирована следующим образом: изначально выбираются параметры  $\mu_{ij}^{(nm)}$ , оцениваются собственные значения  $\lambda_{nm}$  и вероятности  $p_{ij}$ , затем вычисляется расстояние Кульбака-Лейблера (1.19). После этого повторяется вся процедура для других значений  $\mu_{ij}^{(nm)}$ . Если расстояние Кульбака-Лейблера выпукло в исследуемой области параметров  $\mu_{ij}^{(nm)}$ , то выбирается набор  $\mu_{ij}^{(nm)}$  доставляющий максимум функционала расстояния, что обеспечит наилучшую близость модели к экспериментальным результатам.

### 1.3. Экспериментальное наблюдение разложения Шмидта для бифотонного поля

Внешний вид экспериментальной установки по исследованию углового спектра СПР в шмидтовском базисе приведен на рисунке 1.1. В эксперименте нелинейный кристалл ВВО толщиной 2 мм накачивался излучением He-Cd лазера с длиной волны 325 нм. Кристалл был вырезан под коллинеарный частотно-вырожденный синхронизм типа I. Регистрация сигнального и холостого фотонов происходила на длине волны  $650 \pm 20$  нм, ширина регистрируемого частотного спектра определялась пропусканием интерференционного фильтра IF. Излучение накачки фокусировалось в кристалл при помощи кварцевой линзы L1 с фокусным расстоянием 150 мм. Измеренная угловая расходимость накачки с данной линзой составила  $a \frac{\lambda_p}{2\pi} = (5.8 \pm 0.1) \times 10^{-3}$  радиан (1.11). Измеренный размер перетяжки накачки в плоскости кристалла составил  $w_p = (25 \pm 1)$  мкм, что соответствует параметру  $M^2 = 1.4$  для пучка накачки. Дополнительной фильтрации пространственной моды накачки не проводилось, во избежание потери полезного сигнала. Расчетная ширина углового синхронизма (параметр  $b$  в выражении 1.11) в используемом кристалле получилась равной  $b \frac{\lambda}{2\pi} = 0.033$  радиан. Фокусное расстояние линзы L2 подбиралось так, чтобы расчетная ширина нулевой моды Шмидта после оптической системы, состоящей из линз L1 C1 (или L1 C2) совпадала с шириной фундаментальной модой одномодовых волокон SMF1 и SMF2. Размер фундаментальной моды используемых одномодовых волокон составлял 4 мкм.

Для осуществления проекционных измерений на пространственные моды  $HG_{nm}$  (1.10) в эксперименте использовалась голограммная техника. Принцип выделения конкретной моды заключается в следующем: пусть неизвестная пространственная мода  $HG_{nm}$  поступает на вход детектора пространственных мод, состоящего из фазовой маски (фазовой голограммы), и одномодового волокна, торец которого расположен в дальней зоне этой маски (на рисунке 1.1 торец

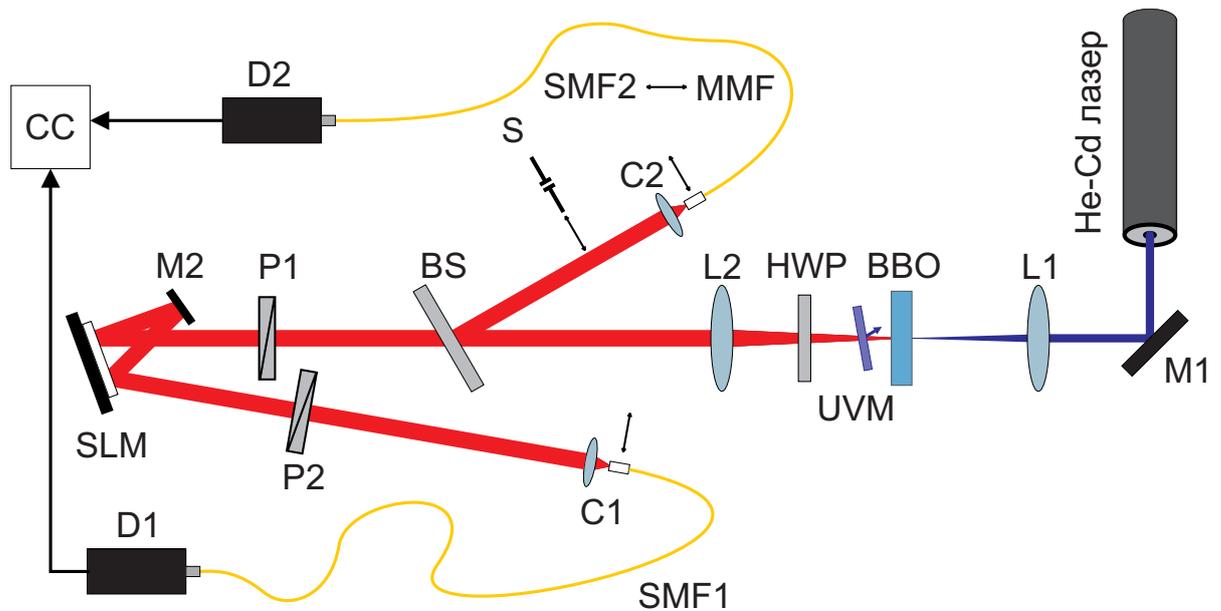


Рис. 1.1. Экспериментальная установка по исследованию пространственного спектра СПР в базисе мод Эрмита-Гаусса

одномодового волокна SMF1 располагался в фокальной плоскости 8-х кратного объектива C1). Пусть сам детектор настроен на выделение моды  $HG_{n'm'}$ , тогда если  $n' = n$  и  $m' = m$ , фазовая голограмма «обращает» пространственное распределение фазы падающего поля, таким образом, что в дальней зоне формируется гауссово распределение амплитуды поля, которое хорошо сопрягается с фундаментальной модой одномодового волокна; при  $n' \neq n$  или  $m' \neq m$ , фазовая голограмма не полностью выравнивает итоговое распределение фазы в дальней зоне, в результате формируется пространственная мода ортогональная фильтрующей моде волокна, это приводит к тому, что детектор не реагирует на входную моду  $HG_{nm}$ .

В эксперименте фазовые голограммы создавались при помощи пространственного фазового модулятора света, SLM (spatial light modulator). Данное устройство представляет собой жидко-кристаллическую матрицу с диагональю  $\sim 0.7$  дюйма и разрешением  $1024 \times 768$  пикселей. Вносимая модулятором фаза пропорциональна насыщенности серого цвета (grey scale level), подаваемого на выбранный пиксель. Фазовый модулятор подключается к компьютеру в качестве внешнего монитора, что на программном уровне упрощает работу. Суще-

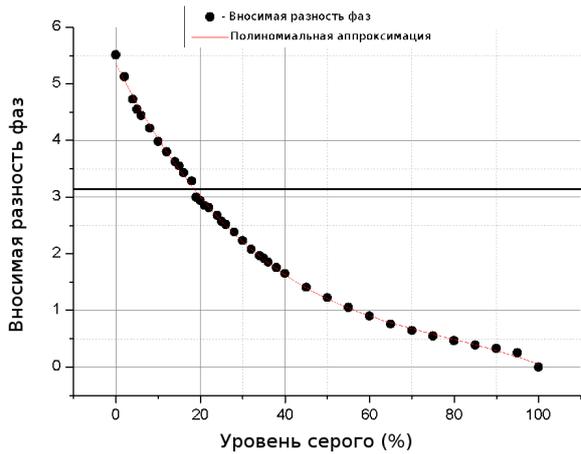


Рис. 1.2. Зависимость вносимой фазы от насыщенности серого цвета

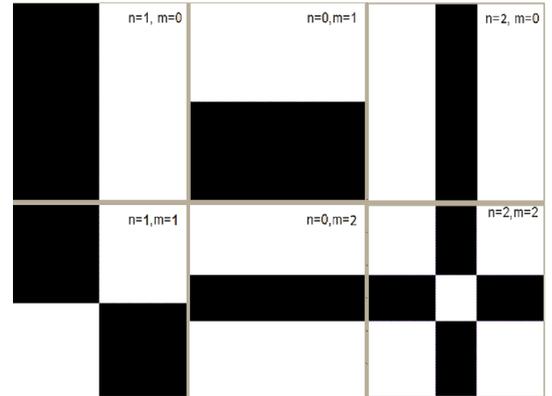


Рис. 1.3. Внешний вид фазовых голограмм для выделения мод Эрмита Гаусса

ственным недостатком используемого модулятора фирмы Cambridge Correlators являлось то, что максимальная вносимая фаза за одно отражение от матрицы составляла  $0.78\pi$  на длине волны 650 нм, поэтому для получения разности фаз  $\pi$  приходилось использовать два последовательных отражения от матрицы.

Калибровочная кривая для используемого пространственного модулятора изображена на рисунке 1.2. Данная зависимость была получена путем измерения интенсивности света с  $\lambda = 650$  нм после поляризатора P2 в зависимости от насыщенности серого цвета, равномерно подаваемого на матрицу SLM. При этом поляризаторы P1 и P2 устанавливались под соответствующими углами  $+45^\circ$  и  $-45^\circ$  к рабочей оси SLM. Экспериментально измеренное положение рабочей оси фазового модулятора составило  $42^\circ$  с вертикалью. Горизонтальной чертой на графике отмечен уровень вносимой разности фаз  $\pi$  между падающим и дважды отраженным от SLM пучком. Внешний вид фазовых масок для выделения нескольких первых мод ЭГ приведен на рисунке 1.3, здесь индексы  $n, m$  отвечают за порядок моды в выражении (1.15).

В силу того, что фазовые маски работают только для одной поляризационной компоненты в экспериментальную установку была установлена полуволновая пластинка HWP, поворачивающая линейную поляризацию бифотонов

СПР вдоль направления рабочей оси SLM. Поляризационные фильтры P1 и P2 использовались для гашения побочной поляризационной компоненты сигнала, возникающей при отражении от диэлектрических зеркал (M) установки.

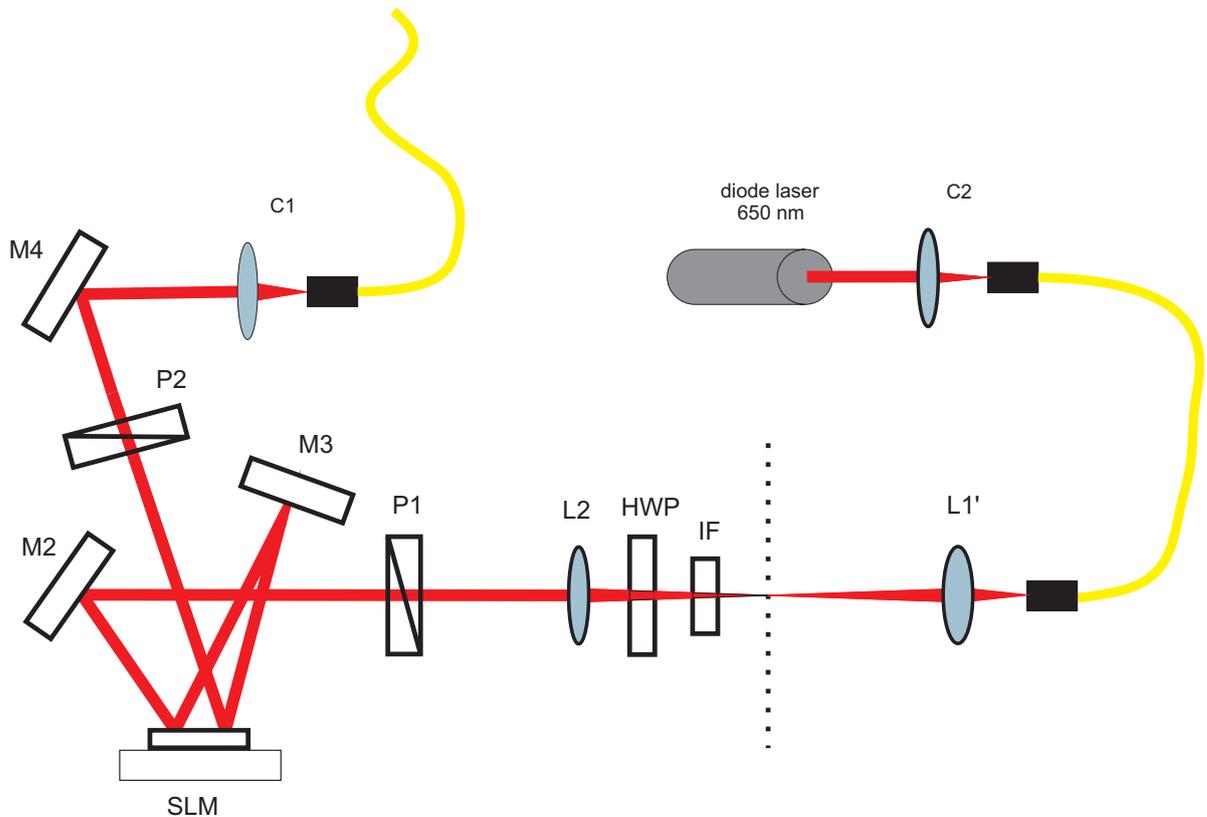


Рис. 1.4. Схема для калибровки параметров фазовых масок

Перед установкой нелинейного кристалла были откалиброваны параметры фазовых масок и исследовано качество мод Эрмита-Гаусса, выделяемых из одномодового гауссова пучка с помощью фазовых масок. Для этого часть схемы до кристалла включительно была модифицирована как представлено на рисунке 1.4. Излучение диодного лазера с длиной волны 650 нм заводилось в одномодовое волокно. 20х-кратный объектив после волокна позволял сфокусировать излучение в область перетяжки телескопа из линз L1, L2 в схеме (Рис. 1.1). Фокусное расстояние и положение объектива выбирались таким образом, чтобы расходимость пучка после перетяжки была равна расходимости сигнала параметрического рассеяния (0.033 рад.).

Изначально были определены центры каждого из отражающихся от SLM

пучков. Для определения центров проводилось перемещение в горизонтальном направлении маски для выделения моды  $\text{HG}_{10}$ . Зависимость интенсивности сигнала в проходящем канале от положения фазовой маски приведено на рисунке 1.5. Аналогичные измерения были проведены в вертикальном направлении. Характер зависимости на рис. 1.5 объясняется тем, что при перемещении маски вдоль горизонтальной координаты в одномодовое волокно попадает проекция состояния после SLM на фундаментальную моду данного волокна. Состояние после фазового модулятора представляет собой суперпозицию нулевой и первой мод, поэтому скорость единичных отсчетов детектора может быть записана в виде:

$$Rs(x) \propto \left| \langle \text{HG}_{00} | \left( \alpha(x) | \text{HG}_{00} \rangle + \sqrt{1 - \alpha(x)^2} | \text{HG}_{10} \rangle \right) \right|^2.$$

Коэффициент  $\alpha$  зависит от положения маски  $x$ , при попадании маски для  $\text{HG}_{10}$  в «центральные» положения  $\alpha = 0$  наблюдается минимум сигнала. Наличие двух минимумов связано с двумя отражениями от SLM.

После определения координат центров подбиралась ширина центральной части для моды  $\text{HG}_{20}$  (Рис. 1.3). Характерная зависимость скорости счета лавинного фотодетектора, установленного после одномодового волокна (Рис. 1.4) от размера центральной части маски  $\text{HG}_{20}$  представлена на рисунке 1.6. Наличие минимума на графике означает, что система детектирования выделяет четную моду  $\text{HG}_{20}$  ортогональную фундаментальной гауссовой моде, попадающей на вход системы. Таким образом, ширина детектируемых мод согласовывалась с приготавливаемыми. При проведении эксперимента предполагалось что в выражении (1.10)  $\Delta k_x = \Delta k_y$ , поэтому полученная ширина моды  $\text{HG}_{20}$  однозначным образом определяет ширины всех детектируемых мод  $\text{HG}_{nm}$  более высокого порядка.

Для определения качества выделяемых мод проводилось перемещение торца одномодового волокна в горизонтальном и вертикальном направлениях в проходящем канале (на рисунке 1.7 представлена зависимость только для переме-

щения вдоль  $x$ ). Скорость единичных отсчетов при таком перемещении пропорциональна квадрату модуля свертки моды  $\text{HG}_{nm}$  с фундаментальной гауссовой модой волокна, в случае  $m = 0$ :

$$R(x) \propto \left| \int_{-\infty}^{\infty} \text{H}_n \left( \frac{\sqrt{2}x'}{w} \right) \exp \left( -\frac{x'^2}{w^2} \right) \exp \left( -\frac{(x-x')^2}{w^2} \right) dx' \right|^2, \quad (1.23)$$

параметр  $w$  в этом выражении отвечает за размер фундаментальной моды в фокальной плоскости линзы С1.

Гистограмма единичных фотоотсчетов детектора D1 при различных выделяемых модах в проходящем через светоделитель BS канале приведена на рисунке 1.8. Так как на вход тестовой схемы подавалась только мода  $\text{HG}_{00}$ , в теории, единственным отличным от 0 столбцом на гистограмме должен оказаться столбец с  $n = 0, m = 0$ . В эксперименте результат оказался чуть отличным от ожидаемого. Видность этого распределения составляла 99%, что говорит о неплохой ортогональности выделяемых мод. Применение самокалибрующейся томографии позволяет эффективно выявлять подобные систематические погрешности детектирующей системы и восстанавливать итоговое состояние с учетом этих погрешностей.

Рассчитываемая видность распределения определялась как

$$V = \frac{R_0 - R_{mn}}{R_0 + R_{mn}},$$

где  $R_0$ -максимальное значение скорости единичных отсчетов для моды  $\text{HG}_{00}$ , а  $R_{mn}$ - значение скорости единичных отсчетов для мод  $\text{HG}_{nm}$ , измеренное при том же положении волокна, что и  $R_0$ .

После настройки детектора пространственных мод были проведены проекционные измерения пространственного спектра СПР на установке (Рис. 1.1). Ультрафиолетовое зеркало UVM было установлено для отсека излучения накачки после кристалла ВВО. В отраженном от неполяризованного светоделителя (50:50) BS оптическом канале с помощью линзы С2 и одномодового

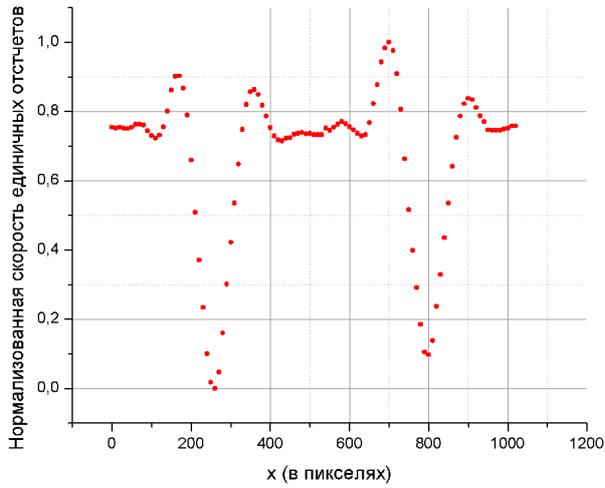


Рис. 1.5. Зависимость интенсивности сигнала от положения маски на SLM

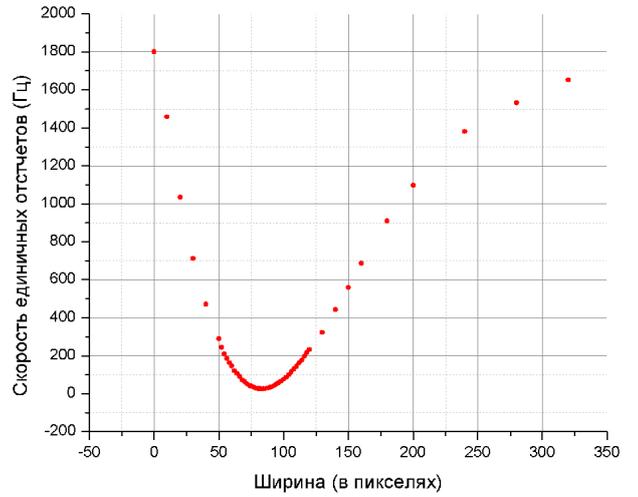


Рис. 1.6. Зависимость интенсивности сигнала от ширины фазовой маски для выделения моды  $HG_{2,0}$

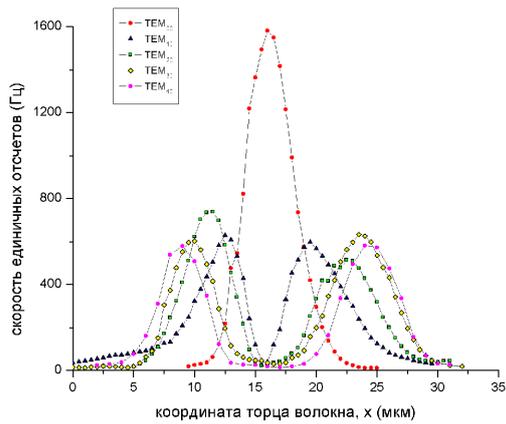


Рис. 1.7. Зависимость интенсивности сигнала от положения торца волокна

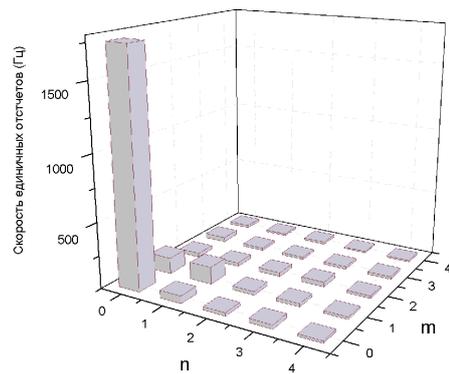


Рис. 1.8. Гистограмма эффективности выделения мод  $HG_{nm}$  из фундаментальной входной моды  $HG_{00}$

волокна SMF2 выделялась только фундаментальная мода  $\text{HG}_{00}$  (в отличие от проходящего канала). Излучение после одномодовых регистрировалось однофотонными детекторами D1 и D2 (Perkin Elmer), электрический сигнал с которых поступал на схему совпадений СС.

Для проверки соответствия детектируемых пространственных мод модам ЭГ снималась зависимость скорости счета совпадений от положения торца одномодового волокна SMF1 (Рис. 1.9). Теоретически, эта зависимость описывается выражением (1.23), но  $R(x)$  теперь – скорость счета совпадений обоих детекторов, а не скорость единичных отсчетов, как это было в имитационной установке. При этом перемещении волокна в сигнале единичных отсчетов детектора D1 наблюдается усредненное распределение по всем модам (Рис. 1.10).

Для количественного анализа распределения на рисунке 1.9 анализировалось расстояние между максимумами измеряемых сверток для каждой выделяемой горизонтальной моды  $\text{HG}_{n0}$ . Результат сравнения этих расстояний с теоретическими для различных значений номера моды приведен на графике 1.12. Теоретические расстояния между максимумами рассчитывались для параметра  $w = 3.0$  мкм в выражении (1.23).

Зависимость скорости счета совпадений от положения торца волокна SMF2, перемещаемого в фокальной плоскости собирающей линзы С2, в отраженном оптическом канале представлена на рисунке 1.11. Данная зависимость хорошо согласуется с распределением на (Рис. 1.9), но при этом, она получена в том канале, в котором выделялась лишь мода  $\text{HG}_{00}$ , при этом «переключение» анализируемых мод  $\text{TEM}_{n0}$  происходило только в проходящем через светоделитель BS оптическом канале. Подобное явление часто называют «скрытой» дифракцией (ghost diffraction).

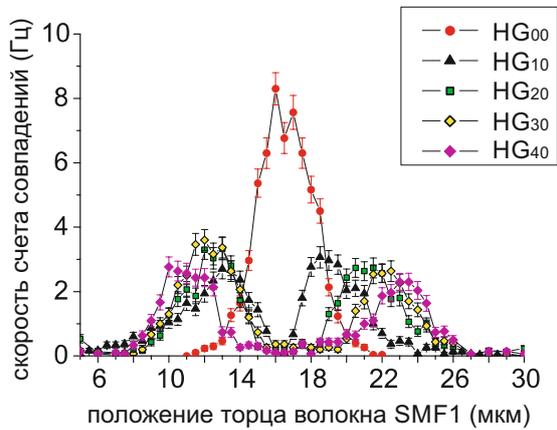


Рис. 1.9. Зависимость скорости счета совпадений в проходящем канале от положения торца волокна

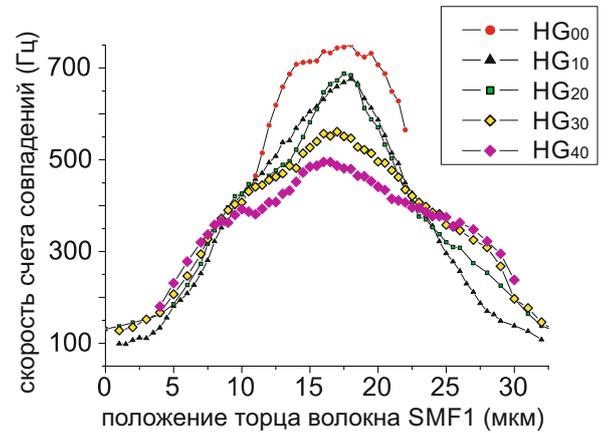


Рис. 1.10. Зависимость скорости единичных отсчетов детектора D1 в проходящем канале от положения торца волокна SMF1

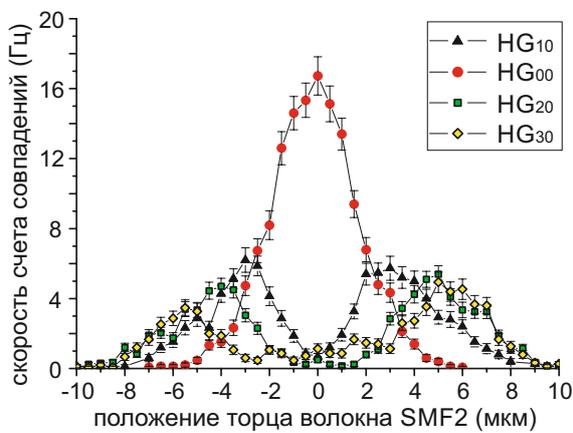


Рис. 1.11. Зависимость скорости счета совпадений в отраженном канале от положения торца волокна

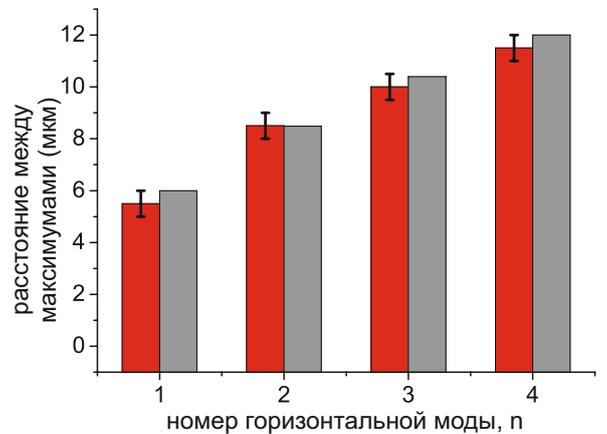


Рис. 1.12. Расстояние между максимумами сигнала свертки (Рис. 1.9), в зависимости от номера детектируемой моды

## 1.4. Наблюдение «скрытых» изображений и «скрытой» интерференции мод Шмидта

Исследованию так называемых «скрытых» изображений посвящено большое количество теоретических и экспериментальных работ. Подробный анализ метода «скрытых» изображений приведен во второй главе диссертации, в текущей главе рассматриваются лишь его основные понятия и экспериментальная реализация на примере мод Шмидта.

Под «скрытыми» изображениями здесь, и в следующих главах, понимается картина пространственных корреляций, наблюдаемая при измерении корреляционных функций второго и выше порядков по интенсивности (в основном  $g^2(x, y) = \frac{\langle I_1 I_2 \rangle}{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}$ ), и не наблюдаемая при измерении интенсивности (скорости единичных отсчетов)  $I(x, y)$ .

Для получения «скрытого» изображения пространственной моды  $HG_{n0}$ , выделяемой в проходящем канале, в отраженный канал была помещена вертикальная щель  $S$  шириной 200 мкм, и вместо одномодового волокна SMF2 было подключено многомодовое ММФ. Путем измерения скорости счета совпадений  $R_{cc}$  в зависимости от горизонтальной координаты щели  $S$  были получены пространственные профили мод  $HG_{10}$  и  $HG_{20}$ , выделяемые в канале с фазовым модулятором (Рис. 1.13). Красными цветом нанесены теоретические распределения для соответствующих мод Эрмита-Гаусса, с условием измерения через вертикальную щель (то есть интегрирования вдоль вертикальной координаты). Ширина этих теоретических распределений была выбрана согласно ширине гауссовой моды, также измеренной при помощи перемещения щели  $S$ . Свободными параметрами при наложении теоретической зависимости являлись нормировочный коэффициент и ширина гауссовой моды вдоль вертикальной координаты, которая получилась отличной от ширины по горизонтали. Данное расхождение связано с использованием «ступенчатых» фазовых масок, которые преобразуют моды ЭГ в фундаментальную лишь приближенно. Подробный ана-

лиз неидеальности работы детектора пространственных мод приведен в третьей главе диссертации.

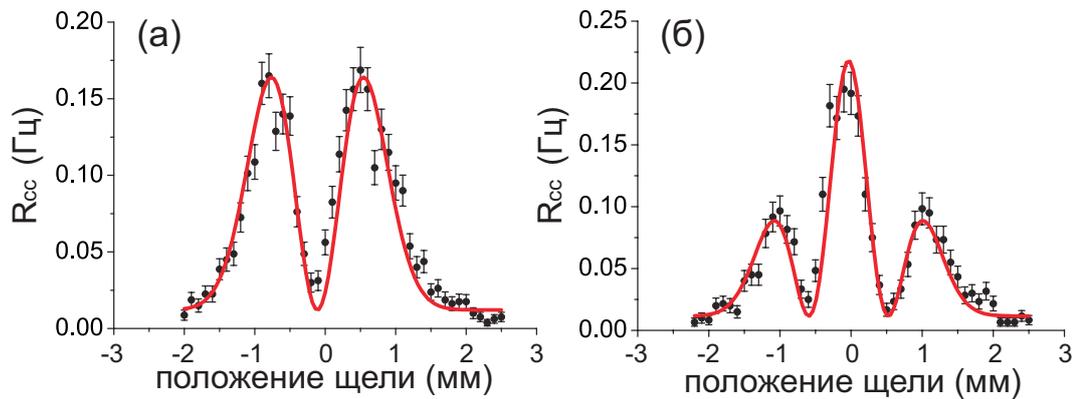


Рис. 1.13. «Скрытые» изображения мод  $HG_{10}$  (а) и  $HG_{20}$  (б), выделяемых в оптическом канале с SLM

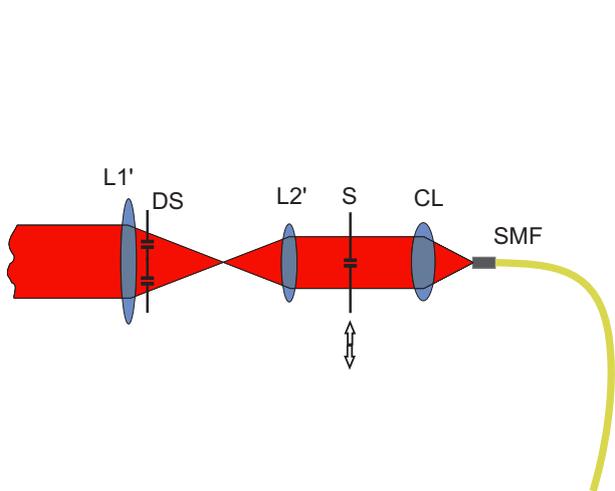


Рис. 1.14. Модификация отраженного канала экспериментальной установки, для наблюдения «скрытой» интерференции

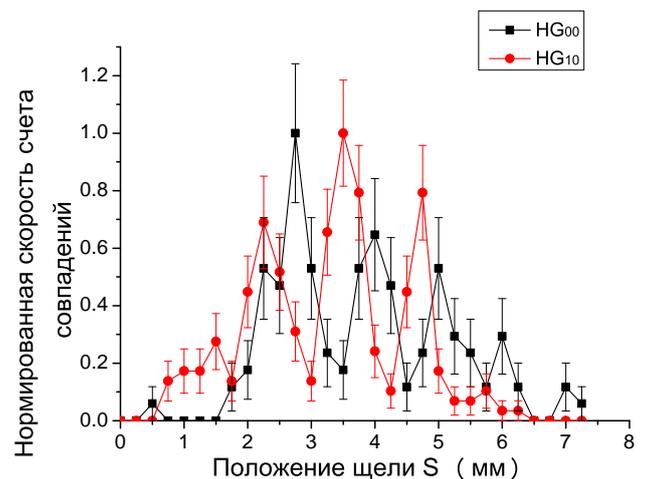


Рис. 1.15. Интерференционная картина в сигнале совпадений, полученная от мод  $HG_{00}$  и  $HG_{10}$  в качестве источников

Для изучения фазового профиля мод  $HG_{00}$  и  $HG_{10}$  отраженный оптический канал был модифицирован согласно рисунку 1.14. Внутри телескопа, образованного линзами  $L1'$  и  $L2'$  с фокусными расстояниями 170 и 50 мм соответственно, была помещена двойная щель DS, расположенная вблизи линзы  $L1'$ . Размер вертикальных щелей составлял 200 мкм, расстояние между щелями 800 мкм. Двойная щель выступала источником Юнга, дальняя зона которого формировалась после линзы  $L2'$ . Перемещение вертикально ориентированной щели

S, шириной 300 мкм, в горизонтальном направлении позволяло наблюдать в сигнале совпадений интерференционную картину от двухщелевого источника. Рассуждая в терминах «скрытых» изображений можно считать, что верхняя из щелей DS «вырезает» только одну узкую область изображений (Рис. 1.13), соответствующую координате, например, +1 мм на данных рисунках (точное значение не существенно). Аналогично, нижняя щель DS тогда «вырезает» область соответствующая координате −1 мм. В зависимости от разности фаз между этими «вырезаемыми» областями ожидалось увидеть изменение положений минимумов и максимумов «скрытой» интерференционной картины. Экспериментально наблюдаемая картина «скрытой» интерференции приведена на рисунке 1.15. В силу достаточно большого размера щелей (что приводит к низкой видности картины) и крайне низкого сигнала совпадений (порядка одного совпадения за 5 мин в максимумах, что увеличивает статистическую погрешность) данный график не несет каких-либо количественных результатов, однако, на качественном уровне заметно смещение картины на половину периода при смене выделяемой в канале с SLM моды с  $HG_{00}$  на  $HG_{10}$ . Данное смещение согласуется с теорией, так как гауссова мода, в первом приближении, имеет плоский фазовый фронт, в то время как мода Эрмита-Гаусса  $HG_{10}(x, y)$  испытывает скачок фазового фронта на  $\pi$  при изменении знака поперечной координаты  $x$ .

## 1.5. Восстановление собственных значений разложения Шмидта методом самокалибрующейся томографии

Для экспериментального определения частот  $f_{i,j}$  входящих в выражение (1.22), по которым затем восстанавливались собственные значения разложения Шмидта (1.15), использовался только сигнал с детектора D1. При размещении торца волокна SMF1 в центральном положении – настройки канала на фильтрацию моды  $HG_{nm}$ , скорость одиночных отсчетов детектора D1, согласно (1.20), пропорциональна собственному значению  $\lambda_{nm}$  (в случае идеального проекцион-

ного измерения).

Для одновременного учета погрешности при измерениях и восстановления собственных значений  $\lambda_{nm}$ , коэффициенты  $\mu_{ij}^{(nm)}$  POVM разложения были представлены в виде:

$$\mu_{ij}^{(nm)} = \mu_{tot} \eta_{nm} \Gamma_{ij}^{(nm)}, \quad (1.24)$$

в этом выражении параметр  $\mu_{tot}$  соответствует общим потерям для всех мод, в них входят потери в оптических каналах и квантовые эффективности детекторов. Матрица  $\eta_{nm}$  отвечает за несимметричные потери (такие, как перекос распределения 1.8):  $\eta_{nm} \equiv 1$  при  $n < m$ , а при  $n \geq m$  коэффициенты  $\eta_{nm}$  восстанавливаются в процессе самокалибрующей томографии. Параметры  $\Gamma_{ij}^{(nm)}$  отвечают за качество проекций на соответствующие моды  $nm$ . Экспериментальные данные полученные в имитационной схеме, а также при исследовании пространственного спектра СПР говорят о хорошем качестве проекционных измерений, поэтому параметры  $\Gamma_{ij}^{(nm)}$  можно представить в виде:

$$\Gamma_{ij}^{(nm)} = \Delta_{nm} \delta_{in} \delta_{jm} + d_{ij}^{(nm)}, \quad (1.25)$$

где все слагаемые в правой части не отрицательны, и

$$\Delta_{nm} \gg \sum_{i,j} d_{ij}^{(nm)}. \quad (1.26)$$

Также, будем считать что неидеальность проекций связана с проекциями на другие моды, тогда  $\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^{(nm)} = 1$ . Параметры  $\Delta_{nm}$  определялись из распределения (Рис. 1.8) и были равны  $\Delta_{nm} = 0.97$ , кроме  $\Delta_{01} = \Delta_{11} = 0.9$ . Параметры  $d_{ij}^{(nm)}$  выбирались случайным образом перед началом самокалибрующей процедуры.

Для моделирования асимметричных потерь при проекционных измерениях были введены два восстанавливаемых параметра  $\eta_1$  и  $\eta_2$ . Предполагалось, что элементы матрицы  $\eta_{nm}$  находящиеся на диагонали равны  $\eta_1$ , остальные элементы при  $n > m$  приравнивались значению  $\eta_2$ . Для определения неизвестных

параметров  $\eta_{nm}$  минимизировалось расстояние Кульбака- Лейблера  $D(\vec{p}, \vec{f})$ , которое вычислялось согласно выражению схожему с (1.19)

$$D(\vec{p}, \vec{f}) = \sum_{i,j} f_{i,j} \ln \left( \frac{f_{i,j}}{p_{i,j}(\rho, \mu)} \right), \quad (1.27)$$

но индексы  $i$  и  $j$  в нем отвечают соответственно за горизонтальный и вертикальный индекс детектируемой моды, в то время, как ранее  $j$  нумеровал все возможные проекции в (1.19). Кроме того, все ожидаемые вероятности, а также частоты измерений  $f_{i,j}$  нормировались на единицу.

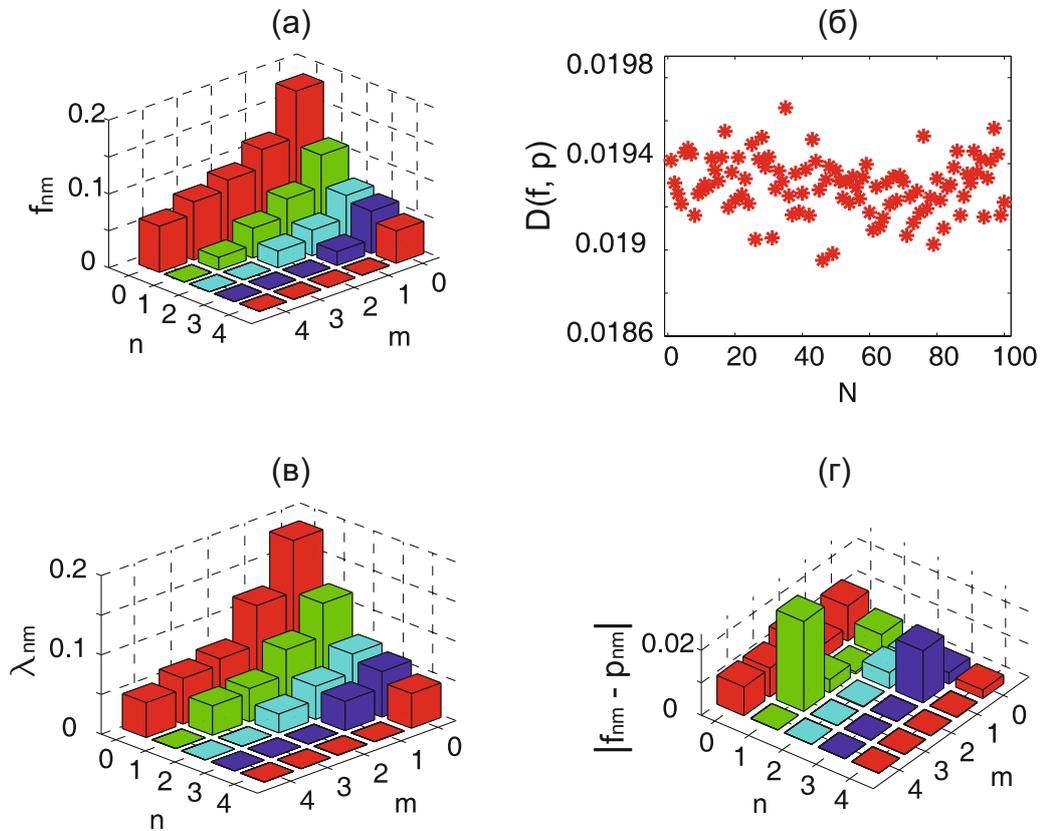


Рис. 1.16. Гистограмма распределения экспериментальных частот  $f_{n,m}$  в зависимости от номера детектируемой моды  $NG_{nm}$  (а); Минимальное значение расстояния Кульбака- Лейблера в зависимости от номера случайной реализации  $N$  (б); Гистограмма распределения восстановленных собственных значений  $\lambda_{nm}$  в зависимости от номера детектируемой моды (в); Разность между экспериментальными значениями  $f_{n,m}$  и ожидаемыми вероятностями  $p_{n,m}$ , засчитанными при  $\eta_1 \approx 1.3$ ,  $\eta_2 \approx 1.125$  (г).

Расчет показал, что поведение  $D(\vec{p}, \vec{f})$  – выпуклое, и что минимум  $D(\vec{p}, \vec{f})$

достигается при значениях параметров  $\eta_1 \approx 1.3$ ,  $\eta_2 \approx 1.125$ . На гистограмме 1.16(а) представлены экспериментальные частоты  $f_{i,j}$ , по которым восстанавливались неизвестные экспериментальные параметры  $\eta_{1,2}$ ,  $d_{ij}^{(nm)}$  и собственные значения  $\lambda_{nm}$ .

Восстановленные собственные значения  $\lambda_{nm}$  приведены на графике 1.16(в), в отличие от распределения для  $f_{i,j}$ , полученные значения симметричны ( $\lambda_{nm} = \lambda_{mn}$ ), также стоит отметить, что восстановленные собственные значения оказались очень близки (на уровне единиц процентов) к экспериментальным значениям  $f_{i,j}$ , что говорит о проводимых измерениях близких к идеальным проекционным. На рисунке 1.16(г) показаны расстояния от ожидаемых вероятностей  $p_{n,m}$ , рассчитанных при восстановленных параметрах  $\eta_1 \approx 1.3$ ,  $\eta_2 \approx 1.125$ , до экспериментально наблюдаемых частот  $f_{i,j}$ . Проведенный алгоритм самокалибрующейся томографии оказался устойчив для широкого набора начальных приближений (в том числе для различных  $d_{ij}^{(nm)}$ ). На графике 1.16(б) приведено распределение минимумов расстояния  $D(\vec{p}, \vec{f})$ , от номера конкретной реализации  $N$ , при этом каждая новая реализация характеризуется новым начальным набором  $d_{ij}^{(nm)}$ .

## 1.6. Выводы к первой главе

В главе экспериментально исследовался угловой спектр биотонного поля, генерируемого в процессе СПР. Было экспериментально подтверждено, что исследуемый угловой спектр хорошо согласуется с моделью разложения по модам Шмидта, с базисными модами разложения в виде мод Эрмита-Гаусса. Фильтрация пространственных мод осуществлялась при помощи голограммной техники.

При помощи процедуры самокалибрующейся томографии были получены параметры «неидеальности» детектирования экспериментальной установки и восстановлены собственные значения разложения Шмидта, с учетом этих параметров.

Результаты первой главы представлены в двух публикациях [39, 40].

# Томография пространственного спектра теплового поля

## 2.1. Квази-разложение Шмидта в классическом тепловом поле

После экспериментна по изучению разложения Шмидта в угловом спектре бифотонного поля, рассмотренного в первой главе диссертации, возник вопрос: возможно ли получить аналог разложения Шмидта в классическом случае, или это свойство только квантовых систем с перепутыванием? Другими словами, обладает ли корреляционная функция интенсивности классического источника особенностями, сходными со случаем бифотонного поля, и если да, то в чем принципиальное различие между разложением по когерентным модам в квантовом и классическом случае? Этому вопросу посвящена вторая глава диссертационной работы.

В общем виде разложение Шмидта для вектора состояния бифотонного поля выглядит следующим образом[7]

$$|\Psi\rangle = \sum_n \sqrt{\lambda_n} \hat{a}_{1n}^\dagger \hat{a}_{2n}^\dagger |0\rangle_1 |0\rangle_2, \quad (2.1)$$

в этом выражении  $\hat{a}_{1n}^\dagger, \hat{a}_{2n}^\dagger$  - операторы рождения в модах с номером 1 (сигнальной) и 2 (холостой) процесса СПР соответственно. Свойства разложения Шмидта для углового спектра бифотонного поля подробно рассмотрены в теоретической работе [7] и экспериментально исследованы в работах [39, 40, 64, 65]. Важным свойством данного разложения является то, что суммирование ведется только по одному индексу  $n$ . Это означает следующее: если в эксперименте каким-либо образом происходит выделение моды  $1_n$  в сигнальном канале, то корреляция будет наблюдаться только с аналогичной модой  $2_n$  холостого кана-

ла.

После введения определенных приближений амплитуда бифотонного поля процесса спонтанного параметрического рассеяния (СПР) может быть записана в виде разложения Шмидта, где собственными функциями являются моды Эрмита-Гаусса:

$$\Phi_{n,m}(x, y) = H_n(\gamma x) H_m(\gamma y) \exp\left(-\frac{\gamma^2(x^2 + y^2)}{2}\right), \quad (2.2)$$

где  $H_{n,m}(\gamma x, \gamma y)$  - полиномы Эрмита. Разложение Шмидта в базисе мод Эрмита-Гаусса экспериментально и теоретически было исследовано и представлено в первой главе диссертации.

В отличие от перепутанных фотонных пар, рождающихся в СПР, для волновой функции которых можно записать разложение Шмидта, в классическом случае перепутывания не существует. Тем не менее, как это было показано в работе [26], похожее разложение может быть записано для функции когерентности (корреляционной функции второго порядка по полю)

$$g^{(1)}(x_1, x_2) = \sum_n \lambda_n \phi_n^*(x_1) \phi_n(x_2), \quad (2.3)$$

здесь  $x_1$  и  $x_2$  - поперечные распространению излучения координаты в двух пространственных направлениях (аналогичных направлениям сигнального и холостого фотонов в процессе СПР). Как и в разложении (2.1) суммирование здесь ведется только по одному индексу  $n$  (этот индекс может быть двухкомпонентным, например, для более удобной нумерации горизонтальных и вертикальных пространственных мод  $n = \{n', m'\}$ ). Для квазитепловых источников оказывается, что разложение (2.3) также может быть проведено по когерентным модам Эрмита-Гаусса. Разложение (2.3) здесь и далее в тексте будем называть квази-разложением Шмидта.

Основным отличием разложения (2.1) от квази-Шмидтовского разложения (2.3) является то, что первое записывается непосредственно для амплитуды бифотонного поля. В случае же квазитепловых источников, разложение пишется

для корреляционной функции. Физически измеримой величиной для разложения (2.1) является квадрат модуля волновой функции, который также может быть записан в виде разложения по когерентным модам, с собственными значениями  $\lambda_n$ . И в квантовом, и в классическом случае измеряется корреляционная функция четверного порядка по полю  $g^{(2)}$ , которая из соотношения Зигерта для теплового источника равна

$$g^{(2)} = 1 + |g^{(1)}|^2 = 1 + \sum_n \lambda_k^2 |\phi_n^*(x_1)\phi_n(x_2)|^2 \leq 2, \quad (2.4)$$

в этом выражении индексы 1 и 2 соответствуют сигнальной и холостой моде.

Для случая бифотонного поля

$$g^{(2)}(0) = 1 + \frac{1}{\langle N \rangle}, \quad (2.5)$$

где  $\langle N \rangle$  - среднее число фотонов на моду. Для малого числа фотонов на моду  $\langle N \rangle \ll 1$  и  $g^{(2)}(0) \gg 1$ . На основе измеренных в эксперименте  $R_C$  - скорости счета совпадений отсчетов,  $R_{S1}$  и  $R_{S2}$  - скорости единичных фотоотсчетов в соответствующих каналах, значение  $g^{(2)}(0)$  рассчитывается как  $g^{(2)}(0) = \frac{R_C}{R_{S1}R_{S2}\tau_C}$ . Значение  $g^{(2)}(0)$  в квантовом случае также может быть записано в виде:

$$g^{(2)}(0) \sim R_C \sim \sum_n \lambda_k |\phi_n^*(x_1)\phi_n(x_2)|^2, \quad (2.6)$$

здесь  $\phi_n^*(x_1)$  - мода, рожденная в холостом канале процесса СПР, а  $\phi_n(x_2)$  - рожденная в сигнальном.

## 2.2. Модель Шелла для квазитеплового источника.

### Разложение по когерентным модам.

Модель Шелла описывает свойства пространственной и временной когерентности излучения модельного источника, обладающего квазитепловой статистикой. Для простоты выкладок, не ограничивая общности, будем рассматривать только одномерный гауссов тепловой источник, также будем считать,

что поляризация фиксирована. Одномерный источник модели Шелла характеризуется корреляционной функцией второго порядка по полю (функцией когерентности) [26].

$$g^{(1)}(x_1, x_2, \omega) = \sqrt{I(x_1, \omega)I(x_2, \omega)} \cdot \mu(x_1 - x_2, \omega), \quad (2.7)$$

здесь  $I(x, \omega)$  - спектральная интенсивность в точке источника с координатой  $x$ , а  $\mu(x_1 - x_2, \omega)$  - комплексная степень пространственной когерентности на оптической частоте  $\omega$ . Функция  $g^{(1)}$  может описывать корреляционную функцию как реального источника, так и вторичных источников, на некотором удалении от реального источника излучения.

В гауссовой модели Шелла интенсивность и степень когерентности представляются в виде:

$$I(x, \omega) = A(\omega) \exp[-x^2/2\sigma_I^2(\omega)], \quad (2.8)$$

$$\mu(x_1 - x_2, \omega) = \exp[-(x_1 - x_2)^2/2\sigma_\mu^2(\omega)], \quad (2.9)$$

где  $A(\omega)$ ,  $\sigma_I(\omega)$ ,  $\sigma_\mu(\omega)$  - положительные константы.

Корреляционная функция  $g^{(1)}$  может быть записана в виде разложения по когерентным модам [66]

$$g^{(1)}(x_1, x_2, \omega) = \sum_n \lambda_n(\omega) \phi_n^*(x_1, \omega) \phi_n(x_2, \omega), \quad (2.10)$$

в этом разложении  $\phi_n(x, \omega)$  - собственные функции, а  $\lambda_n(\omega)$  соответствующие им собственные значения, суть решения интегрального уравнения Фредгольма

$$\int g^{(1)}(x_1, x_2, \omega) \phi_n(x_1, \omega) dx_1 = \lambda_n(\omega) \phi_n(x_2, \omega), \quad (2.11)$$

где интегрирование ведется по всей области источника.

Для простоты выкладок введем следующие обозначения:

$$a(\omega) = \frac{1}{4\sigma_I^2(\omega)}, \quad b(\omega) = \frac{1}{4\sigma_\mu^2(\omega)}, \quad (2.12)$$

после чего получаем решение уравнения Фредгольма в виде разложения по когерентным модам [26]

$$g^{(1)}(x_1, x_2, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{2^n n!} \left( \frac{2c}{a+b+c} \right)^{1/2} \left( \frac{b}{a+b+c} \right)^n \times H_n(x_1 \sqrt{2c}) H_n(x_2 \sqrt{2c}) \exp[-c(x_1^2 + x_2^2)]. \quad (2.13)$$

Здесь константа  $c = \sqrt{a^2 + 2ab}$ , а  $H_n$  – полиномы Эрмита. Таким образом, собственные функции разложения (2.10) есть

$$\phi_n(x) = \left( \frac{2c}{\pi} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(x \sqrt{2c}) \exp(-cx^2) \quad (2.14)$$

с соответствующими собственными значениями

$$\lambda_n = A \left( \frac{\pi}{a+b+c} \right)^{1/2} \left( \frac{b}{a+b+c} \right)^n. \quad (2.15)$$

Остановимся более подробно на распределении собственных значений, так как их можно непосредственно измерить экспериментально. Из выражения (2.15) получается отношение

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_0} = \left( \frac{b}{a+b+c} \right)^n, \quad (2.16)$$

с другой стороны, это отношение собственных значений можно записать всего через один экспериментально измеримый параметр

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_0} = \left( \frac{1}{\beta^2/2 + 1 + \beta[(\beta/2)^2 + 1]^{1/2}} \right)^n, \quad (2.17)$$

где

$$\beta = \frac{\sigma_\mu}{\sigma_I} \quad (2.18)$$

определяет степень пространственной когерентности пучка, то есть отношение радиуса когерентности пучка к радиусу самого пучка.

В случае, когда  $\sigma_\mu \gg \sigma_I$  – пучок полностью когерентен в сечении и  $\beta \gg 1$ ,

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_0} \approx \frac{1}{\beta^{2n}}. \quad (2.19)$$

Из этого выражения следует, что при  $n \neq 0$ ,  $\lambda_n \ll \lambda_0$  (то есть в полностью когерентном случае) в разложении присутствует лишь одна нулевая мода.

Если  $\sigma_I \gg \sigma_\mu$  (пучок не когерентен в сечении) асимптотика выражения (2.17) приобретает вид:

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_0} \approx 1 - n\beta, \quad (2.20)$$

то есть случай с большим, в пределе – бесконечным числом мод.

На рисунке (2.1) приведены распределения для собственных значений в зависимости от управляющего параметра  $\beta$ .

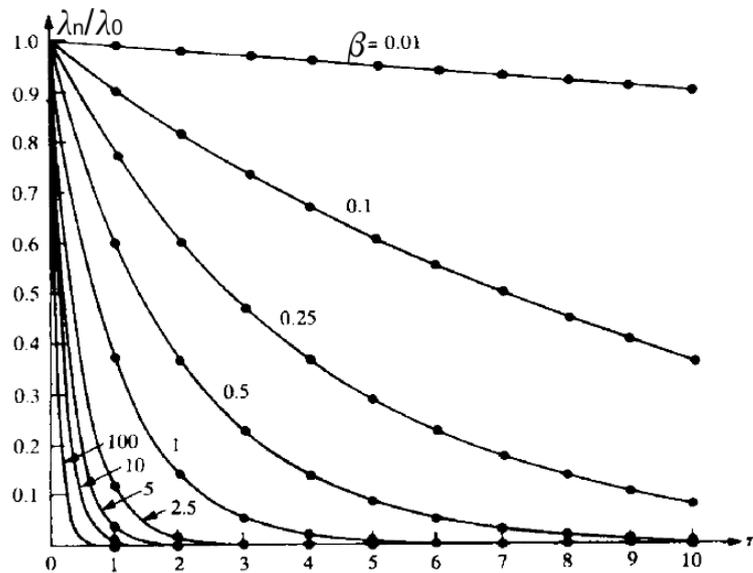


Рис. 2.1. Отношение  $n$ -го собственного значения к нулевому в зависимости от параметра  $\beta$

Рассмотренная выше теория, за исключением модового состава корреляционной функции  $g^{(1)}$ , относится к случаю поля в ближней зоне, то есть распределения по когерентным модам сразу после квазитеплового источника. В силу устройства детектора пространственных мод особый интерес представляет случай распределения поля в дальней зоне. При переходе из ближней зоны дифракции в дальнюю распределение собственных значений не меняется, из-за

дифракции меняется лишь профиль моды согласно уравнению [26]

$$\psi(x, z) = -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x') H_0^{(1)}(kR) dx', \quad (2.21)$$

где  $H_0^{(1)}$  - функция Ханкеля первого рода нулевого порядка,  $k$ - волновое число,  $R = \sqrt{(x - x')^2 + z^2}$ . При больших  $z$  расстояние до рассматриваемой точки пучка можно записать через угол, под которым точка видна от источника.

$$R \approx r - x' \sin \theta, \quad (2.22)$$

здесь  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$  - расстояние от центра теплового источника до точки наблюдения. Используя асимптотику функции Ханкеля при больших значениях аргумента итоговое выражение для дальней зоны дифракции приобретает вид

$$\psi_n^{(\infty)}(r, \theta) = A_n \cos \theta H_n \left( \frac{k \sin \theta}{\sqrt{2c}} \right) \exp \left[ -\frac{(k \sin \theta)^2}{4c} \right] \cdot \frac{\exp[i(kr - \pi/4)]}{\sqrt{kr}}, \quad (2.23)$$

в этом выражении коэффициенты равны:

$$A_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}} \frac{k}{(2\pi c)^{1/4}}. \quad (2.24)$$

### 2.3. «Скрытые» изображения в классических и квантовых полях

Пространственные корреляции в классических полях давно исследуются для построения «скрытых» изображений. Общая схема для получения «скрытых» изображений (ghost imaging – в иностранной литературе) приведена на рисунке 2.2.

Классические или квантовые поля (сигнальное  $\hat{E}_S$  и опорное  $\hat{E}_R$ ) распространяются в двух различных направлениях. Поля могут проходить через линейные оптические элементы, такие, как линзы или зеркала. В опорном канале схемы устанавливается объект с пропусканием  $T(\boldsymbol{\rho}, t)$ , где  $\boldsymbol{\rho}$  - поперечная координата относительно распространению излучения. Объект может быть чисто

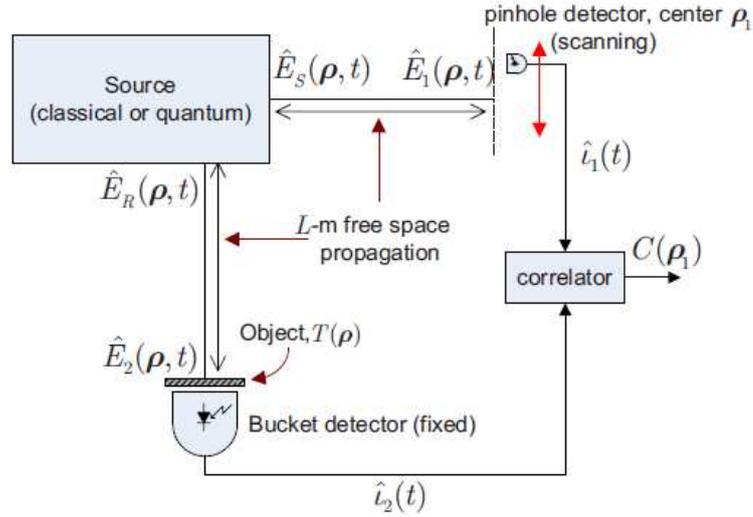


Рис. 2.2. Установка для измерения «скрытых» изображений (Рис. из [67])

фазовым [68], все излучение  $\hat{E}_2(\rho, t)$  после объекта собирается в детектор. В сигнальном канале устанавливается точечный детектор, который может перемещаться в поперечном направлении  $\rho_1$ . Сигналы с обоих детекторов поступают на схему совпадений. При перемещении точечного детектора вдоль координаты  $\rho_1$ , в корреляционной функции  $g^{(2)}(\rho_1)$  регистрируется пропускание объекта  $T(\rho_1, t)$ . Распределения, полученные на основе приведенной процедуры, были названы «скрытыми» изображениями, так как собирающий детектор, куда попадает излучение после объекта (фазовой маски, или маски, работающей на пропускание), не имеет достаточного разрешения для определения пропускающей функции  $T(\rho_1, t)$ .

Впервые демонстрация эффекта «скрытых» изображений была проведена в работе [20]. В данной работе в качестве квантового источника света использовались бифотонные состояния, получаемые в процессе СПР. Проявление «скрытых» изображений в этом эксперименте объяснялось наличием перепутанности у фотонных пар, то есть квантовой природой света. Однако, последующие экспериментальные [69] и теоретические [24, 70] работы показали, что «скрытые» изображения могут проявляться не только в случае квантовых источников, но

и в классических полях от квазитепловых источников, но контраст получаемых изображений отличаться в худшую сторону. Рассмотрим более подробно теорию «скрытых» изображений, как для случая квазитеплого излучения, который более детально будет освещен в дальнейшем, так и для квантового случая.

Для случая, когда в качестве опорного и холостого поля используются перепутанные фотонные пары, рожденные, например, в процессе СПР в кристалле с квадратичной нелинейностью  $\chi^{(2)}$  и синхронизмом типа II [71]. В приближении плоской волны накачки, приближении тонкого кристалла, и считая, что процесс стационарен во времени, поле на выходе из кристалла может быть представлено с помощью преобразований Боголюбова

$$\widehat{E}_i(\mathbf{q}) = U_i(\mathbf{q})\widehat{a}_i(\mathbf{q}) + V_i(\mathbf{q})\widehat{a}_j^\dagger(-\mathbf{q}), \quad i \neq j = S, R \quad (2.25)$$

Здесь  $\widehat{E}_i(\mathbf{q}) = \int \frac{d\rho}{2\pi} e^{-i\mathbf{q}\rho} \widehat{E}_i(\rho)$ , где  $\widehat{E}_i(\rho)$  - операторы рождения в сигнальной ( $i=S$ ) и опорной ( $i=R$ ) модах на выходе из кристалла, а  $\widehat{a}_i$  - операторы рождения и уничтожения на входе. Конкретный вид функций  $U_i, V_i$  подробно рассмотрен в работе [71].

Для случая квазитеплого источника излучение в опорный и сигнальный каналы попадает после светоделителя, в один вход которого заводится квазитепловое излучение, на другом входе - вакуум. Тогда

$$E_S(\rho) = ta(\rho) + rv(\rho), \quad E_R(\rho) = ra(\rho) + tv(\rho), \quad (2.26)$$

где  $t$  и  $r$  - коэффициенты пропускания и отражения светоделителя соответственно,  $a$  - тепловое поле, а  $v$  - вакуумное поле на входе, некоррелированное с полем  $a$ . В дальнейшем будем полагать, что  $a$  характеризуется гауссовой статистикой, для которой все корреляционные функции произвольного порядка выражаются через функции второго порядка.

$$\langle a^\dagger(\rho)a(\rho') \rangle = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{q}\cdot(\rho-\rho')} \langle n(\mathbf{q})_{\text{th}} \rangle, \quad (2.27)$$

где  $\langle n(\mathbf{q})_{\text{th}} \rangle$  - среднее число фотонов в моде  $\mathbf{q}$  теплового поля. В общем случае

перед попаданием на соответствующий детектор в каждом канале поля распространяются не в свободном пространстве, а возможно, проходят через различные оптические элементы, а в опорном канале - еще и через амплитудную или фазовую маску. Обозначим соответствующую передаточную функцию сигнального канала как  $h_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$ , опорного - как  $h_2(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$ , тогда поля в плоскостях детекторов могут быть записаны:

$$\widehat{E}_1(\boldsymbol{\rho}) = \int d\boldsymbol{\rho}'_1 h_1(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_1) \widehat{E}_S(\boldsymbol{\rho}'_1) + L_1(\boldsymbol{\rho}_1), \quad \widehat{E}_2(\boldsymbol{\rho}) = \int d\boldsymbol{\rho}'_2 h_2(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}'_2) \widehat{E}_R(\boldsymbol{\rho}'_2) + L_2(\boldsymbol{\rho}_2), \quad (2.28)$$

где  $L_1$  и  $L_2$  отвечают за потери в соответствующих каналах и не дают вклад в корреляционные функции. Вся информация об объекте содержится в корреляционной функции флуктуаций интенсивности:

$$G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \langle I_1(\boldsymbol{\rho}_1) I_2(\boldsymbol{\rho}_2) \rangle - \langle I_1(\boldsymbol{\rho}_1) \rangle \langle I_2(\boldsymbol{\rho}_2) \rangle, \quad (2.29)$$

где  $\langle I_i(\boldsymbol{\rho}_i) \rangle = \langle \widehat{E}_i^\dagger(\boldsymbol{\rho}_i) \widehat{E}_i(\boldsymbol{\rho}_i) \rangle$  - средняя интенсивность  $i$ -го пучка. Так как  $\widehat{E}_1$  и  $\widehat{E}_2^\dagger$  коммутируют, пренебрегая слагаемыми, связанными с потерями, корреляционная функция приобретает следующий вид:

$$G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \int d\boldsymbol{\rho}'_1 \int d\boldsymbol{\rho}''_1 \int d\boldsymbol{\rho}'_2 \int d\boldsymbol{\rho}''_2 h_1^*(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}''_1) h_1(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_1) h_2^*(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}''_2) h_2(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}'_2) \times \\ \times \left( \langle \widehat{E}_S^\dagger(\boldsymbol{\rho}''_1) \widehat{E}_S(\boldsymbol{\rho}'_1) \widehat{E}_R^\dagger(\boldsymbol{\rho}''_2) \widehat{E}_R(\boldsymbol{\rho}'_2) \rangle - \langle \widehat{E}_S^\dagger(\boldsymbol{\rho}''_1) \widehat{E}_S(\boldsymbol{\rho}'_1) \rangle \langle \widehat{E}_R^\dagger(\boldsymbol{\rho}''_2) \widehat{E}_R(\boldsymbol{\rho}'_2) \rangle \right)$$

Для случая теплового источника это уравнение сильно упрощается:

$$G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \sim \left| \int d\boldsymbol{\rho}'_1 \int d\boldsymbol{\rho}'_2 h_1^*(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_1) h_2(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}'_2) \langle a^\dagger(\boldsymbol{\rho}'_2) a(\boldsymbol{\rho}'_2) \rangle \right|^2 \quad (2.30)$$

С другой стороны, для случая СПР, используя коммутационные соотношения для полей на выходе из кристалла, можно получить:

$$G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \sim \left| \int d\boldsymbol{\rho}'_1 \int d\boldsymbol{\rho}'_2 h_1(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_1) h_2(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}'_2) \langle E_S^\dagger(\boldsymbol{\rho}'_1) E_R(\boldsymbol{\rho}'_2) \rangle \right|^2, \quad (2.31)$$

здесь, используя соотношение (2.25),

$$\langle E_S^\dagger(\boldsymbol{\rho}'_2) E_R(\boldsymbol{\rho}'_2) \rangle = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{q} \cdot (\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2)} U_1(\mathbf{q}) V_2(-\mathbf{q}). \quad (2.32)$$

Таким образом, явно определяет сходство между классическим (2.30) и квантовым (2.31) случаем, а именно – корреляционная функция  $\langle a^\dagger(\boldsymbol{\rho}')a(\boldsymbol{\rho}') \rangle$  и среднее число фотонов  $\langle n(\mathbf{q}) \rangle_{\text{th}}$  в моде  $q$  играют такую же роль, как корреляционная функция  $\langle E_S^\dagger(\boldsymbol{\rho}')E_R(\boldsymbol{\rho}') \rangle$  и  $U_1(\mathbf{q})V_2(-\mathbf{q})$ . Корреляционная функция определяет свойства пространственной когерентности квазитеплого источника: длина когерентности для такого источника пропорциональна обратной ширине распределения  $\langle n(\mathbf{q}) \rangle_{\text{th}}$ . Аналогичную роль играет корреляционная функция в квантовом случае.

Как уже отмечалось, ключевым отличием между квазиклассическим и квантовым случаем является видность «скрытых» изображений. Ухудшение видности обусловлено фоновым слагаемым  $\langle I_1(\boldsymbol{\rho}_1) \rangle \langle I_2(\boldsymbol{\rho}_2) \rangle$ . Определим видность, как  $V = \frac{G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)}{\langle I_1(\boldsymbol{\rho}_1) \rangle \langle I_2(\boldsymbol{\rho}_2) \rangle}$ . В случае теплового источника корреляционная функция  $G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)$  пропорциональна  $\langle n(\mathbf{q}) \rangle_{\text{th}}^2$ , в то время как в случае с источником перепутанных пар фотонов  $G^{(2)}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \sim |U_1(\mathbf{q})V_2(-\mathbf{q})|^2 = \langle n(\mathbf{q}) \rangle_{\text{th}} + \langle n(\mathbf{q}) \rangle_{\text{th}}^2$ , где  $\langle n(\mathbf{q}) \rangle_{\text{th}} = |V_2(-\mathbf{q})|^2 = |V_1(\mathbf{q})|^2$  – среднее число фотонов в моде при СПР. Различие двух этих случаев незначительно, если  $\langle n(\mathbf{q}) \rangle_{\text{th}} \gg 1$ . При малом числе фотонов на моду при  $\langle n(\mathbf{q}) \rangle_{\text{th}} \ll 1$ , случай, который рассмотрен в первой главе диссертации, различие становится существенным. В этом случае используется режим счета единичных фотонов и видность от источника СПР сильно превышает видность «скрытых» изображений от теплового источника.

В настоящей главе представлены исследования «скрытых» изображений пространственных мод, генерируемых квазитепловым источником. В этом случае изображения как такового не формируется, вместо изображения наблюдается картина «скрытой» дифракции в опорном канале в дальней зоне (в фокальной плоскости объектива на торце пространственного одномодового волокна).

## 2.4. Расчет корреляционной функции второго порядка в дальней зоне дифракции

Используя приведенную выше теорию, можно записать выражение (2.30) для случая разложения по когерентным модам. Будем считать, что в каждом оптическом канале в фокальных плоскостях объективов с фокусными расстояниями  $f$  выделяются горизонтальные моды  $\text{HG}_{m_1 0}$  и  $\text{HG}_{m_2 0}$  в холостом и сигнальном соответственно. Выделение пространственных мод производится при помощи фазовых масок (аналогично тому, как это происходило при детектировании шмидтовских мод в главе 1), затем эти моды проецируются на фундаментальную моду одномодовых волокон, также находящихся в фокальных плоскостях обоих объективов. В этом случае передаточные функции  $h_1$  и  $h_2$  будут состоять из: передаточных функций объективов –  $\exp(-i\frac{x_1 x_1' k}{f})$ ,  $\exp(-i\frac{x_2 x_2' k}{f})$ , где волновое число  $k = 2\pi/\lambda$ ; передаточных функций масок –  $\text{H}_{m_1}(\sqrt{2c}x_1')$ ,  $\text{H}_{m_2}(\sqrt{2c}x_2')$  (без учета нормировки); передаточных функций одномодовых волокон –  $\exp\left(-\frac{(x_1 - \xi_1)^2}{w_f^2}\right)$  и  $\exp\left(-\frac{(x_2 - \xi_2)^2}{w_f^2}\right)$ , где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – координаты торцов одномодовых волокон в фокальных плоскостях объективов.

Для простоты выкладок будем считать, что волокна находятся в центрах поперечных сечений оптических пучков  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ , тогда выражение (2.30) без учета нормировки может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}
 G^{(2)}(0, 0) &= \Upsilon + \left| \sqrt{2^{m_1} m_1!} \sqrt{2^{m_2} m_2!} \int dx_1 dx_2 dx_1' dx_2' \exp\left(-i\frac{x_1 x_1' k}{f}\right) \right. \\
 &\quad \times \exp\left(-i\frac{x_2 x_2' k}{f}\right) \exp\left(-\frac{x_1^2}{w_f^2}\right) \exp\left(-\frac{x_2^2}{w_f^2}\right) \\
 &\quad \left. \times \text{H}_{m_1}(\sqrt{2c}x_1') \text{H}_{m_2}(\sqrt{2c}x_2') g^{(1)}(x_1', x_2') \right|^2,
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

где  $g^{(1)}(x_1', x_2')$  соответствует разложению (2.13), а  $\Upsilon = \langle I(x_1) I(x_2) \rangle$ . После расписывания всех членов выражения в явном виде и группировки подобных слагаемых получается выражение: (здесь и далее, в силу громоздкости формул, не будем записывать нормировочные множители  $\sqrt{2^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2!}$ , так как в конеч-

ном итоге они сократятся с множителями  $\frac{1}{2^n n!}$  выражения (2.13))

$$\begin{aligned}
G^{(2)}(0, 0) &= \Upsilon + \frac{2c}{\pi^2} \left| \sum_n \lambda_n \int dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2 \exp \left( -i \frac{x_1 x'_1 k}{f} - i \frac{x_2 x'_2 k}{f} \right) \right. \\
&\quad \times H_{m_1}(\sqrt{2c}x'_1) H_{m_2}(\sqrt{2c}x'_2) H_n(\sqrt{2c}x'_1) H_n(\sqrt{2c}x'_2) \\
&\quad \left. \times \exp(-c(x_1^2 + x_2^2)) \exp \left( -\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{w_f^2} \right) \right|^2. \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Производя интегрирование по координатам в фокальных плоскостях объективов  $x_1$ ,  $x_2$  и приводя подобные слагаемые можно получить:

$$\begin{aligned}
G^{(2)}(0, 0) &= \Upsilon + 2c \left| \sum_n \lambda_n \int dx'_1 dx'_2 H_{m_1}(\sqrt{2c}x'_1) H_{m_2}(\sqrt{2c}x'_2) \right. \\
&\quad \times H_n(\sqrt{2c}x'_1) H_n(\sqrt{2c}x'_2) \exp(-c(x_1^2 + x_2^2)) \\
&\quad \left. \times \exp \left[ -x'_1 \left( c + \frac{k^2 w_f^2}{4f^2} \right) \right] \exp \left[ -x'_2 \left( c + \frac{k^2 w_f^2}{4f^2} \right) \right] \right|^2, \tag{2.35}
\end{aligned}$$

так как полиномы Эрмита ортогональны с весом  $\exp(-x^2/(2c))$ , то при

$$\frac{k^2 w_f^2}{4f^2} = c, \tag{2.36}$$

это выражение упрощается к виду

$$G^{(2)}(0, 0) = \Upsilon + \left| \sum_n \lambda_n \delta_{n,m_1} \delta_{n,m_2} \right|^2. \tag{2.37}$$

Учитывая, что интенсивность в каждом из каналов пропорциональна весу детектируемой моды  $I_{1,2} \propto \lambda_{m,n}$ , нормированную корреляционную функцию  $g^{(2)} = \frac{G^{(2)}}{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}$  можно записать как

$$g^{(2)}(0, 0) = 1 + \delta_{m_1, m_2}. \tag{2.38}$$

Таким образом, при правильном выборе фокусного расстояния  $f = \sqrt{\frac{k w_f^2}{4c}}$  (в эксперименте подбирался параметр  $c$ ), превышение корреляций над единицей будет наблюдаться только при выделении мод с одинаковыми номерами ( $m_1 = m_2$ ). В этом случае детектируемые моды будут являться собственными функциями разложения (2.13), в противном случае, при  $\frac{k^2 w_f^2}{4f^2} \neq c$ , нужно производить

разложение подынтегральной экспоненты в ряд по модам (2.14), что приводит к неоднозначному выделению мод, и наличию корреляций при  $m_1 \neq m_2$  (что также наблюдалась при проведении эксперимента).

## 2.5. Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки приведена на рисунке (2.3). Для получения квазитеплого источника излучения был использован метод предложенный в работах [72, 73]: излучение от He-Ne лазера с длиной волны 632.8 нм рассеивалось на заматированном вращающемся стеклянном диске. Рассеянное от диска излучение обладает тепловой статистикой, если распределение неоднородностей фазы по сечению рассеивающегося на этом диске лазерного пучка случайное в каждый момент времени, который меньше периода обращения диска [66]. Для наблюдения квазитепловой статистики в такой схеме необходимо, чтобы  $\tau_{det} \ll \tau_{gg}$  и  $\tau_{gg} \ll \tau_{rel}$ , здесь  $\tau_{det} \sim 2$  нс - время детектирования,  $\tau_{gg} \sim 1$  мс - время прохождения матины по пятну лазерного пучка на диске,  $\tau_{rel} \sim 10$  мс - время накопления сигнала.

Линза перед стеклянным диском используется для расширения пучка, который затем ограничивался диафрагмой S. Изменение размера данной диафрагмы позволяет изменять управляющий параметр  $\beta$ . Диск находится в фокусе эффективной линзы, образованной объективами O1 и O2. Данная линза формирует на выходе параллельный пучок. Ширина этого пучка искусственно ограничивалась с помощью диафрагмы S2. Для измерения корреляционной функции излучение после диафрагмы S2 разделялось на два оптических канала при помощи неполяризационного светоделителя BS. В проходящем (опорном) канале происходило выделение заданной моды при помощи голограммной техники (подробно процесс детектирования пространственных мод при помощи бинарных фазовых масок изложен в первой главе). Для создания фазовых масок использовался пространственный модулятор света SLM, максимальная вноси-

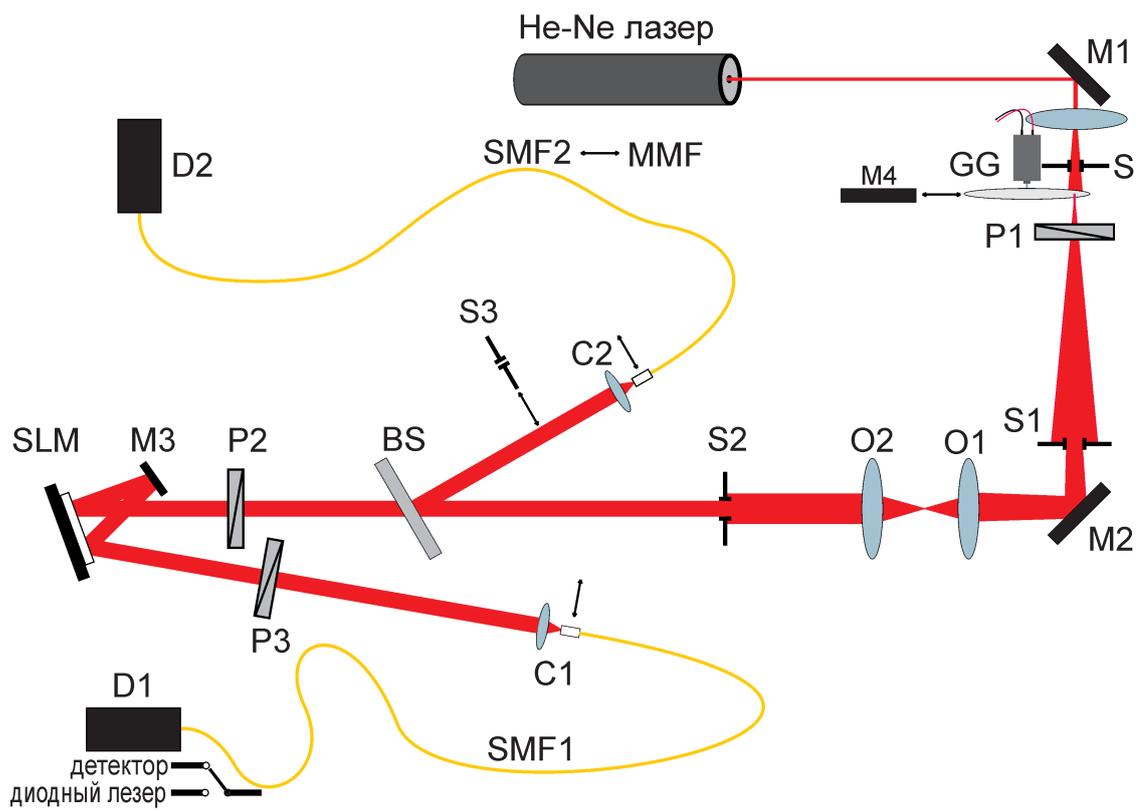


Рис. 2.3. Экспериментальная установка для томографии пространственного спектра квазипеплового источника.

мая разность фаз которого составляла около  $0.8\pi$ . Из-за малой вносимой фазы использовалось два последовательных отражения от матрицы SLM. Поляризаторы P2 и P3 были установлены вдоль рабочей оси фазового модулятора для обеспечения наибольшей эффективности при выделении мод. Поляризатор P1 позволял управлять общей входной интенсивностью. Так как в схеме использовались счетчики фотонов D1, D2 излучение лазера дополнительно ослаблялось (примерно в 100 раз) нейтральным фильтром, установленным после лазера (на схеме не указан).

В отраженном (сигнальном) канале после собирающей линзы C2 устанавливалось одномодовое волокно SMF2 для выделения фундаментальной моды  $HG_{00}$  из всего многомодового спектра канала. Для наблюдения «скрытых» изображений пространственных мод в отраженном канале устанавливалась вертикальная щель S3 шириной 200 мкм и одномодовое волокно SMF2 заменялось на многомодовое MMF.

## 2.6. Результаты измерений

Первоначально перед исследованием квазитеплого источника была собрана схема имитации пространственных распределений для определения ширины фундаментальной моды волокон SMF1 и SMF2 (в схеме использовались одинаковые волокна), а также для проверки работоспособности системы выделения мод. Для этого вместо стеклянного диска было установлено зеркало M4, как показано на рисунке 2.3, и когерентное излучение диодного лазера с длиной волны 650 нм заводилось через одномодовое волокно SMF1. В проходящем канале фаза гауссова пучка изменялась в соответствии с фазовой голограммой, подаваемой на SLM, далее пучок, отражаясь от зеркала M4 (на месте диска) и от светоделителя BS, попадал в отраженный от светоделителя BS канал оптической схемы. В отраженном канале сформированная в процессе дифракции мода  $TEM_{mn}$  в фокальной плоскости объектива C2 проецировалась на фундамен-

тальную моду одномодового волокна SMF2. Интенсивность сигнала (скорость единичных отсчетов детектора D2), прошедшего через волокно SMF2, пропорциональна квадрату модуля свертки выделяемой моды и фундаментальной модой волокна. Если перемещение торца волокна происходит по одной координате  $x$  в фокальной плоскости линзы C2, то интенсивность пропорциональна:

$$I(x) \sim \left| \int_{-\infty}^{\infty} \text{TEM}_{m0}(\xi) \text{TEM}_{00}(x - \xi) d\xi \right|^2. \quad (2.39)$$

Экспериментальные распределения интенсивностей, представляющих свертки двух фундаментальных мод и первой и фундаментальной моды, приведены на рисунках 2.4 и 2.5 соответственно.

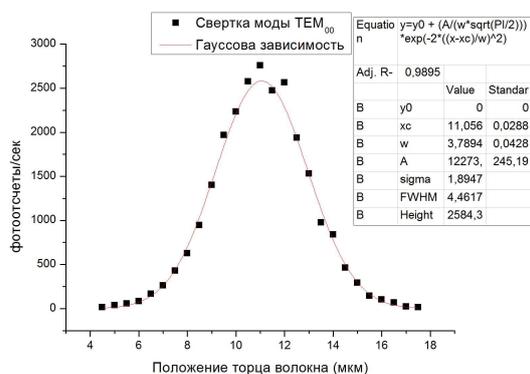


Рис. 2.4. Свертка моды  $\text{TEM}_{00}$  с фундаментальной модой одномодового волокна

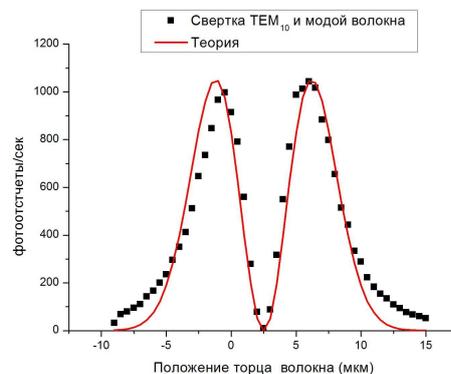


Рис. 2.5. Свертка моды  $\text{TEM}_{10}$  с фундаментальной модой волокна

По распределению (Рис. 2.4) была определена ширина гауссовых мод используемых одномодовых волокон ( $w = 3.79 \pm 0.04$  мкм), полученное значение использовалось при детектировании пространственных мод от теплового источника. На рисунке 2.5 представлена свертка нулевой и первой пространственной моды, теоретически рассчитанная свертка этих мод построена красным. Для расчета теоретической зависимости использовался один управляющий параметр - ширина фундаментальной моды волокна. По ширине фундаментальной моды и положению минимума для первой моды были определены параметры фазовых голограмм (аналогичная процедура выполнялась в эксперименте,

рассмотренном в главе 1, где дано более детальное описание калибровки фазовых масок).

После проведения калибровочных измерений на имитационной схеме исследовался спектр мод, генерируемых квазитепловым источником. Свертки выделяемых мод  $TEM_{20}$  и  $TEM_{30}$ , измеренные путем перемещения торца волокна в горизонтальном направлении в фокальной плоскости линзы  $S1$  в проходящем канале, приведены на рисунках 2.6 и 2.7 соответственно. На этих рисунках отчетливо видны побочные центральные максимумы, которых не должно быть в свертках при совпадении размеров нулевой пространственной моды квазишмидтовского разложения с фундаментальной модой волокна.

Теоретические расчеты показали, что рождение побочных центральных максимумов происходит, если ширина детектируемых мод  $s$  меньше, чем ширина фундаментальной моды волокна. На рисунках 2.8 и 2.9 приведены характерные ненормированные зависимости для сверток мод  $TEM_{20}$  и  $TEM_{30}$  с гауссовой модой, при отношении ширины фундаментальной моды к ширине детектируемых равном 0.7. В силу того, что при моделировании исследовалось только качественное поведение сверток, значения по оси ординат на графиках не указаны. Если ширина моды волокна окажется больше, чем ширина детектируемой моды, то провал в центре свертки не будет достигать своего минимального значения ( $g^{(2)} > 1$ ), то есть ухудшится видность распределений. Таким образом, необходимо было получить ширину детектируемой моды равную ширине моды волокна, то есть подобрать параметр  $\beta$ . Для этого использовались диафрагмы  $S$  и  $S2$ . Диафрагма  $S2$  определяет ширину распределения интенсивности  $\sigma_I$ , в то время как, диафрагма  $S$  влияет на размер рассеиваемого пятна на диске, то есть на  $\sigma_\mu$  - среднее количество рассеивателей в освещенной области. При помощи этих диафрагм подбиралась ширина тепловой моды  $TEM_{00}$  и сравнивалась с шириной моды волокна (рис. 2.10).

На рисунке 2.11 представлены два профиля нулевой моды квазитеплового источника, полученные методом «скрытых» изображений (при помощи переме-

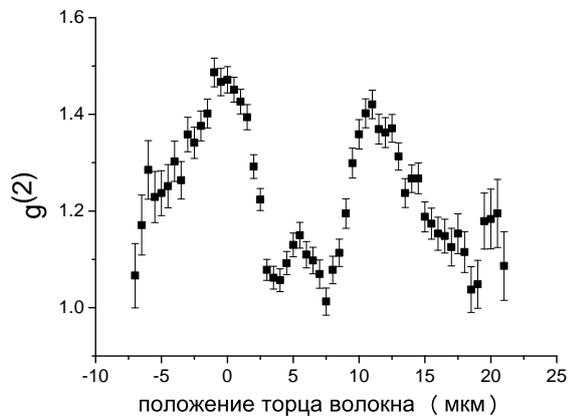


Рис. 2.6. Свертка моды  $\text{TEM}_{20}$  с фундаментальной модой в зависимости от положения торца волокна (по горизонтальной оси) в проходящем канале.

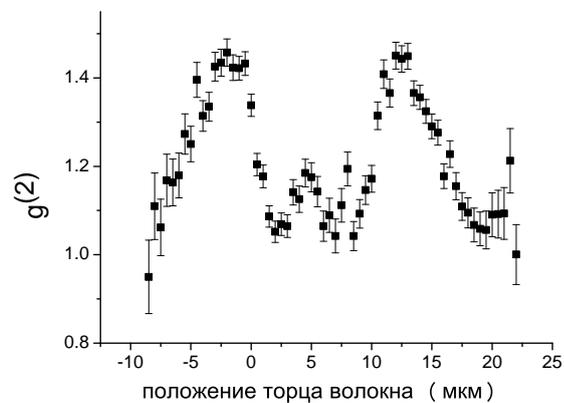


Рис. 2.7. Свертка моды  $\text{TEM}_{30}$  с фундаментальной модой в зависимости от положения торца волокна (по горизонтальной оси) в проходящем канале.

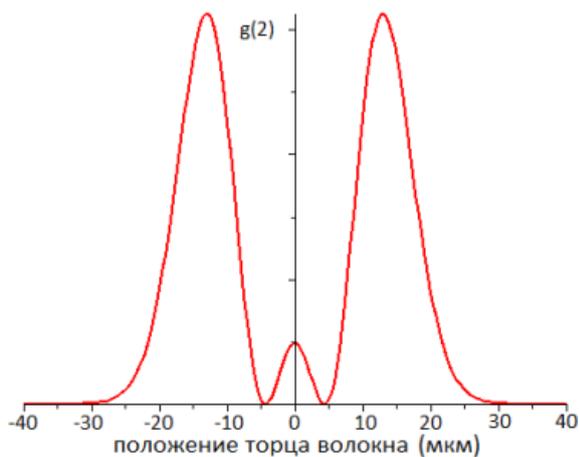


Рис. 2.8. Теоретический расчет для свертки моды  $\text{TEM}_{20}$  с фундаментальной модой большей ширины.

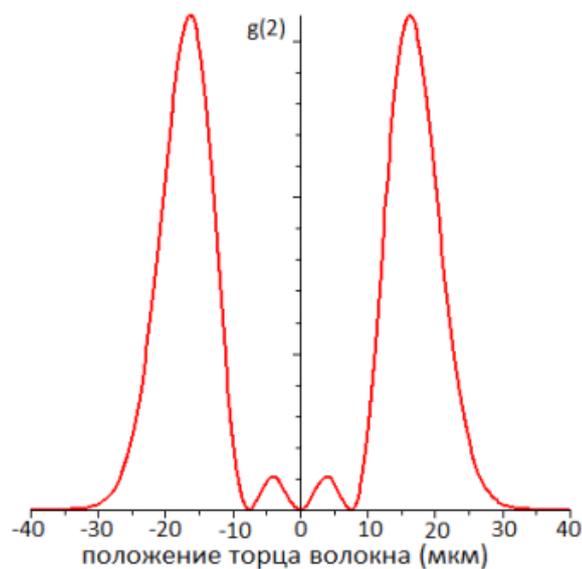


Рис. 2.9. Теоретический расчет для свертки моды  $\text{TEM}_{30}$  с фундаментальной модой большей ширины.

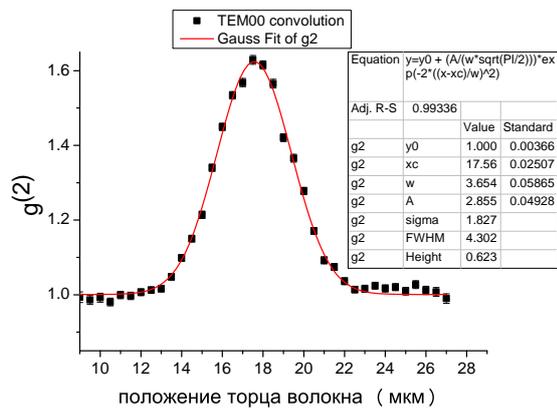


Рис. 2.10. Свертка моды теплового источника  $TEM_{00}$  с фундаментальной модой одномодового волокна.

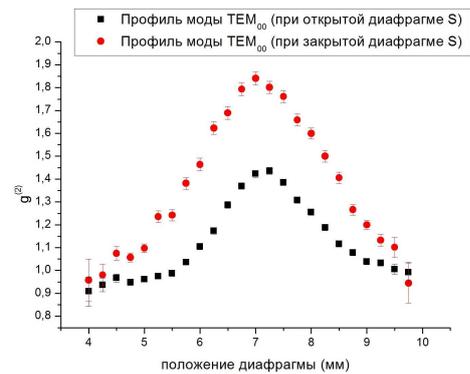


Рис. 2.11. Профили тепловой моды  $TEM_{00}$  при двух крайних значениях радиуса когерентности пучка  $\sigma_\mu$ .

щения щели S3 в поперечном направлении, и регистрации всего пространственного спектра за щелью многомодовым волокном ММФ). Как следует из выражения (2.17) – при увеличении  $\sigma_\mu$  параметр  $\beta$  уменьшается, следовательно число физически ненулевых собственных значений в разложении увеличивается (под физически ненулевыми значениями подразумевается те, для которых отношение сигнал/шум превышает хотя бы несколько стандартных отклонений).

После подбора необходимой ширины нулевой моды от теплового источника были измерены свертки остальных горизонтальных мод с фундаментальной модой в отраженном канале, полученные экспериментальные зависимости приведены на рисунке 2.12 (до моды  $TEM_{50}$  включительно). Без ограничения общности, измерения свертки, а затем и профилей мод, проводились только с горизонтальными модами в силу симметрии разложения по вертикальным и горизонтальным модам. В то время, как собственные значения разложения и ортогональность собственных функций были получены для всего спектра тепловых мод.

На рисунке 2.13 приведены значения нормированной корреляционной функции  $g^{(2)}(0)$  для первых 6-ти горизонтальных мод при положении торца волокна отраженного канала в центре распределений представленных на рисунке 2.12, то есть когда выделяемые моды в обоих каналах сцентрированы. Рисунок 2.13

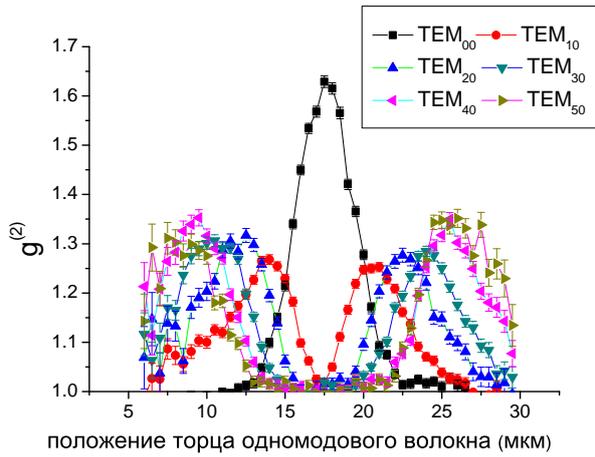


Рис. 2.12. Свертка мод теплового источника  $TEM_{m0}$  с фундаментальной модой одномодового волокна.

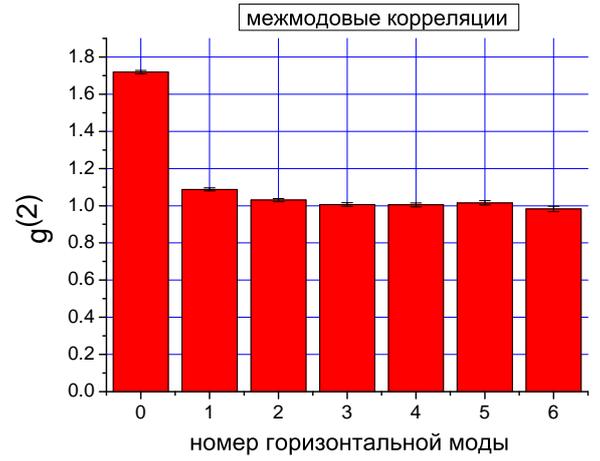


Рис. 2.13. Проверка ортогональности мод  $TEM_{m0}$  и нулевой моды.

демонстрирует, что корреляции имеются только между одинаковыми модами, выделяемыми в соответствующих оптических каналах (под корреляциями понимается превышение функции  $g^{(2)}$  над единицей).

Скорость единичных отсчетов детектора в проходящем канале пропорциональна весу моды, выделяемой в этом же канале. Таким образом определялись собственные значения в разложении (2.10), при этом одновременно измерялась корреляционная функция  $g^{(2)}$  при центральном положении торца волокна в отраженном канале. На рисунке 2.14 представлено распределение собственных значений в зависимости от номера выделяемой моды  $m, n$ . Данное распределение перенормировано на скорость единичных фотоотсчетов для  $TEM_{0,0}$  выделяемой моды.

Аналогично распределению  $g^{(2)}$  на гистограмме 2.13, рисунок 2.15 показывает корреляцию вертикальных и горизонтальных мод только с фундаментальной модой (для большей наглядности построено превышение  $g^{(2)}$  над единицей). Максимум этого распределения может быть перенесен на другую моду, если в отраженном канале организовать такую же схему выделения мод, как и в проходящем. За неимением второго пространственного фазового модулятора подобная симметричная схема не была реализована в проведенном эксперимен-

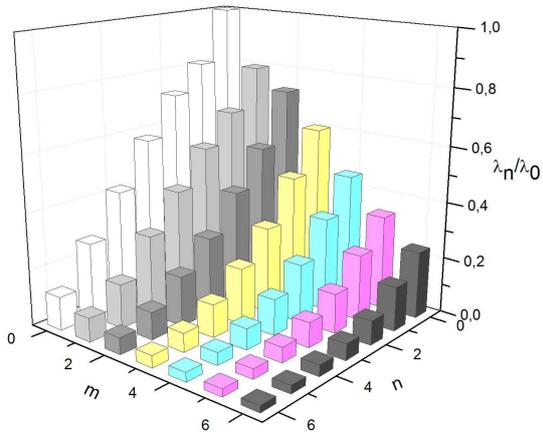


Рис. 2.14. Нормированное распределение собственных значений в зависимости от номера выделяемой моды.

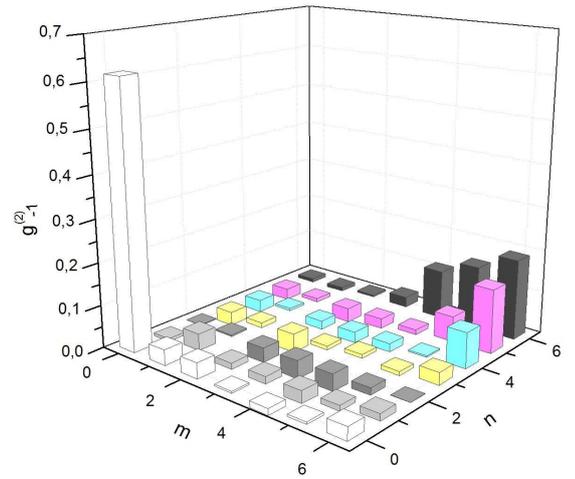


Рис. 2.15. Распределение  $g^{(2)} - 1$  в зависимости от номера выделяемой моды  $TEM_{mn}$  в канале с SLM.

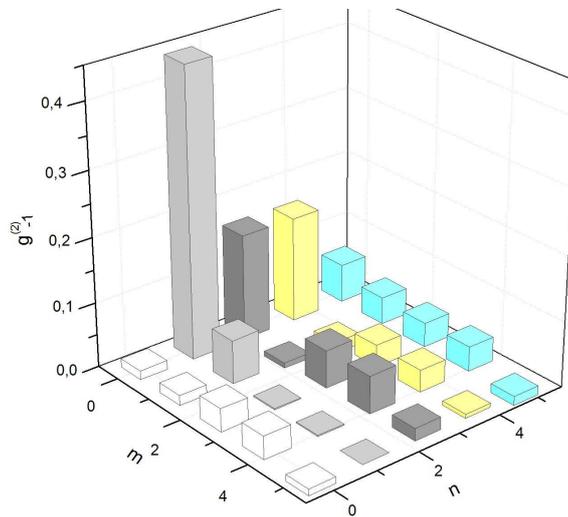


Рис. 2.16. Распределение  $g^{(2)} - 1$  в зависимости от номера выделяемой моды, при выделении в отраженном канале моды  $TEM_{10}$ .

те.

Тем не менее на рисунке 2.16 приведено распределение для  $g^{(2)} - 1$ , в случае, когда в отраженном канале выделялась не фундаментальная мода, а мода  $\text{TEM}_{1,0}$ . Для этого в отраженный канал устанавливалась фазовая маска для моды  $\text{TEM}_{1,0}$  (Рис. 1.3), сделанная из двух тонких стекол, расположенных рядом. Стекла подбирались так, что дополнительный набег фазы из-за их неодинаковой толщины составлял  $\sim \pi$  (при дифракции лазерного излучения на стыке этих стекол в дальней зоне наблюдалась мода  $\text{TEM}_{1,0}$ ). Наличие множества "побочных" пиков на этом рисунке обусловлено качеством стеклянной маски (неоднородностью толщин стекол и неидеальными краями стекол на месте их стыка).

Сечение распределения 2.14 при  $n = 0$  приведено на рисунке 2.17, на этом же графике представлены теоретические значения при управляющем параметре  $\beta = 0.244 \pm 0.018$ . Ошибка, указанная для теоретических значений, определяется погрешностью экспериментально измеренного значения параметра  $\beta$ .

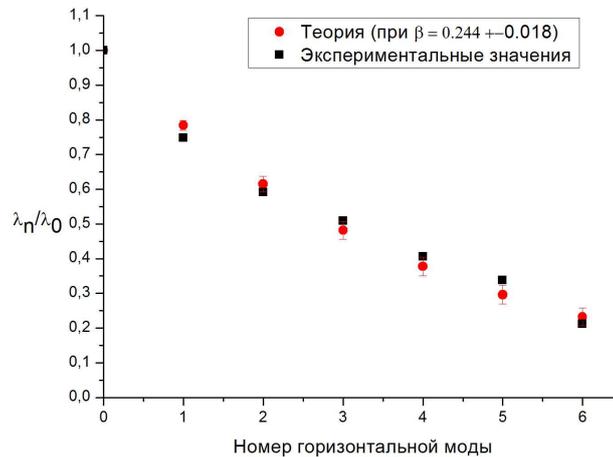


Рис. 2.17. Нормированное распределение собственных значений в зависимости от номера выделяемой горизонтальной моды.

Значение управляющего параметра  $\beta$  было непосредственно измерено в

эксперименте. Для этого вместо одномодовых волокон использовались многомодовые. Перед объективами в проходящем и отраженном канале были установлены узкие диафрагмы ( $d \sim 200$  мкм), при этом диафрагма в отраженном канале перемещалась в горизонтальном направлении. Таким образом, в зависимости от положения диафрагмы скорость единичных фотоотсчетов детектора D2 представляла собой распределение интенсивности пучка с шириной  $\sigma_I$  (рис. 2.18), в то время как распределение в корреляционной функции  $g^{(2)}$  содержало информацию о пространственной когерентности пучка с радиусом когерентности  $\sigma_\mu$  (рис. 2.19). По измеренным значениям  $\sigma_I$  и  $\sigma_\mu$  было определено значение  $\beta = 0.244 \pm 0.018$ .

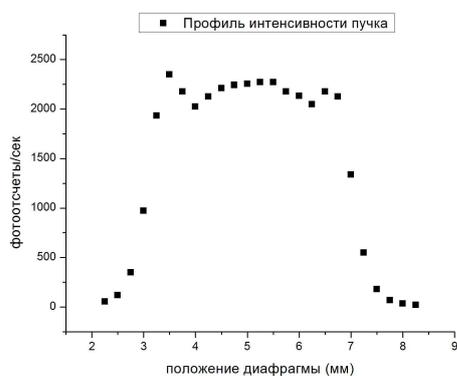


Рис. 2.18. Распределение интенсивности пучка, измеренное в отраженном канале.

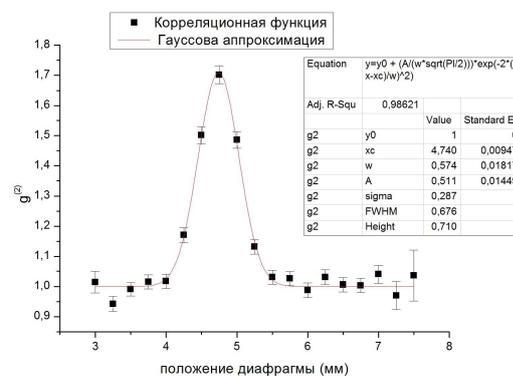


Рис. 2.19. Зависимость корреляционной функции  $g^{(2)}$  от положения диафрагмы в отраженном канале.

Как уже отмечалось ранее, для получения «скрытых» изображений выделяемых мод в отраженном канале вместо одномодового волокна устанавливалось многомодовое, а перед объективом С2 была установлена узкая диафрагма S3 диаметром  $\sim 200$  мкм (ширина пучка  $\sim 3.5$  мм). В проходящем канале, как и ранее, при помощи фазового модулятора и одномодового волокна происходило выделение  $TEM_{mn}$  мод. Полученные изображения мод  $TEM_{10}$ ,  $TEM_{20}$  и  $TEM_{30}$  приведены на рисунках 2.20, 2.21 и 2.22 соответственно.

На этих же рисунках представлены характерные теоретические распределения для соответствующих мод.

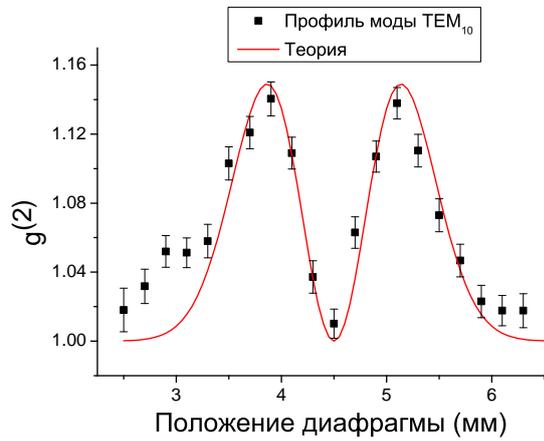


Рис. 2.20. «Скрытое» изображение моды  $TEM_{10}$ .

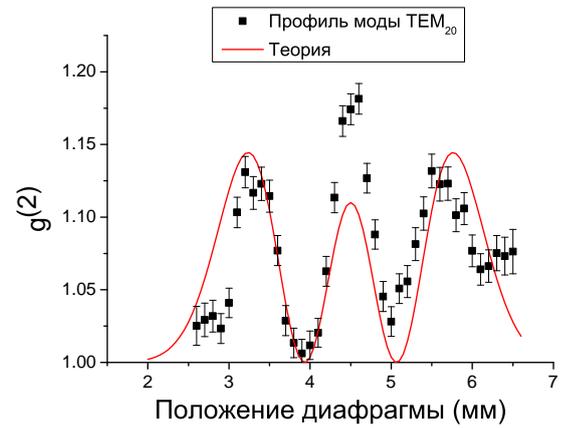


Рис. 2.21. «Скрытое» изображение моды  $TEM_{20}$ .

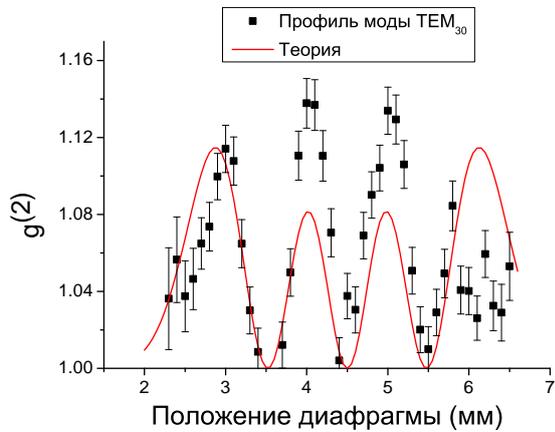


Рис. 2.22. «Скрытое» изображение моды  $TEM_{3,0}$ .

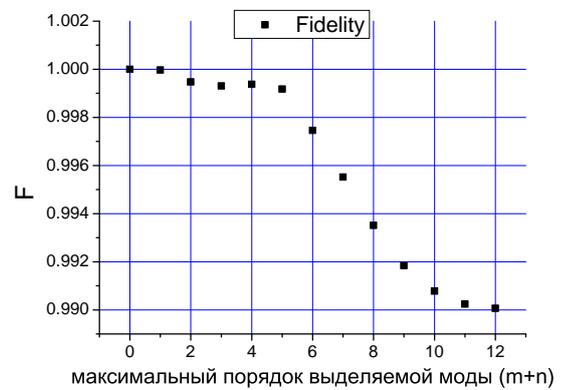


Рис. 2.23. Зависимость критерия соответствия с теорией  $F$  (fidelity) от максимального порядка выделяемой моды  $(m + n)$ .

## 2.7. Обсуждение результатов

Как следует из теории, ширина мод квази-шмидтовского разложения однозначно связана с управляющим параметром  $\beta$ . Так как детектирование мод этого разложения основывалось на проецировании моды  $\text{TEM}_{00}$  на фундаментальную моду волокна, то только при совпадении их ширин (при конкретном экспериментальном значении  $\beta$ ) наблюдались с наилучшей видностью и правильные по форме распределения в  $g^{(2)}$ . Как было отмечено выше, в случае различных ширин этих мод проявляются побочные максимумы (рисунки 2.6 и 2.7) или наблюдается ухудшение видности.

Наличие побочных «всплесков»  $g^{(2)}$  для больших значений  $m$  и  $n$  при проверке наличия корреляций только между одинаковыми модами (Рис. 2.15) может быть вызвано их высоким ( $\sim 10 - 12$ ) порядком. Такие моды могут физически не уместиться на освещенной области фазового модулятора (диаметр освещенной области  $\sim 4$  мм). Необходимо точное совмещение центров фазовых голограмм на матрице (так как полный набег фазы формируется за два отражения), в то время как точность их совмещения составляла около двух пикселей.

До сих пор рассматривалось только качественное (наглядное) согласие с теорией для распределения собственных значений. Для определения количественной меры соответствия была введена мера fidelity, равная

$$F = \frac{\sum_i \sqrt{\lambda_i^{\text{Theor}} \lambda_i^{\text{Exp}}}}{\sqrt{(\sum_k \lambda_k^{\text{Theor}}) (\sum_k \lambda_k^{\text{Exp}})}}, \quad (2.40)$$

где  $\lambda_k^{\text{Theor}}$  – теоретически рассчитанные собственные значения, в зависимости от номера моды, а  $\lambda_k^{\text{Exp}}$  – измеренные экспериментально, индексы  $i$  и  $k$  двойные  $i, k = \{n, m\}$ . Из этого выражения видно, что  $0 \leq F \leq 1$ , и  $F \equiv 1$  только при полном совпадении теоретических и экспериментальных собственных значений.

Значение  $F$  для распределения собственных значений по горизонтальным модам  $\text{TEM}_{m0}$  (Рис. 2.17) получилось равным  $F = 0.9996$ .

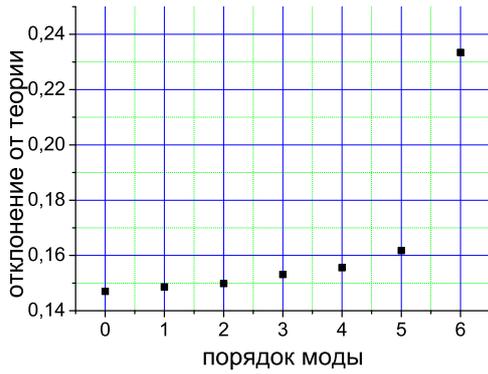


Рис. 2.24. Квадратичное отклонение  $g^{(2)}$  от теории.

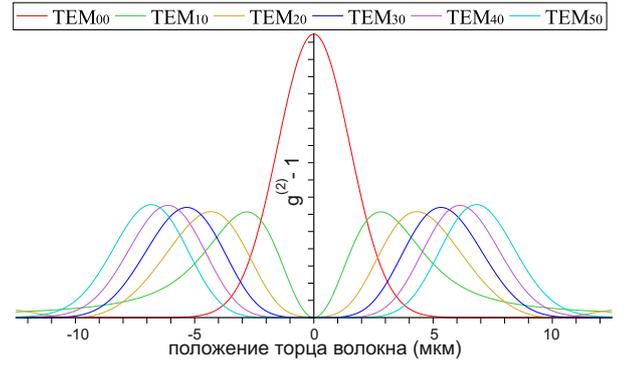


Рис. 2.25. Моделирование сверток мод с использованием реальной фазовой маски.

На рисунке 2.23 представлена зависимость величины fidelity от максимального порядка выделяемой моды: то есть с теорией сравниваются все моды, порядок которых равный сумме  $m + n$ , не превосходит заданного значения  $l$  по оси абсцисс. Из этого распределения видно, что начиная с 6-го порядка качество выделяемых мод начинает падать, но, как показывает распределение корреляций между  $TEM_{mn}$  и  $TEM_{00}$  (Рис. 2.15) рассмотренное выше, падение качества незначительно вплоть до  $m + n \leq 9$ . Как и следовало ожидать, при  $l \gg 1$  распределение для  $F$  стремиться к некоторой постоянной величине, так как при больших порядках мод и теоретические, и экспериментальные собственные значения стремятся к 0 (Рис. 2.1).

На рисунке 2.24 приведена зависимость квадратичного отклонения экспериментально полученного значения  $g^{(2)}$  от теории. Ошибка рассчитывалась как квадрат разности двумерных векторов. Номер моды  $i$  по горизонтальной оси означает, что ошибка рассчитывалась для мод с номером  $m$  и  $n$  не превосходящими  $i$ . Так же, как и в распределении fidelity для собственных значений, график демонстрирует резкое возрастание ошибки для высоких номеров  $m, n$ .

Первоначально наличие роста сверток на рисунке 2.13 с увеличением номера  $m$  не удавалось объяснить, после чего была проведена компьютерная симуляция с учетом работы реальной фазовой маски, результаты которой приведены

на рисунке 2.25 (значения по оси ординат не обозначены, так как при симуляции не производилась нормировка  $g^{(2)}$ ). Отличие экспериментально используемой фазовой маски от идеальной заключалось в том, что используемая маска не позволяла организовать амплитудную модуляцию выделяемых мод (только фазовую), если амплитудная модуляция была бы возможной, то выделяемые моды являлись бы модами Эрмита-Гаусса не только в дальней зоне, но и в ближней, что улучшило бы согласие профилей мод и их сверток с теоретическими распределениями. Для амплитудной модуляции также можно использовать фазовый модулятор, но работать не в нулевом порядке дифракции отраженного от него излучения, а в первом [74]. В этом случае амплитудная модуляция достигается за счет изменения контраста дифракционной решетки, переводящей излучение в первый порядок дифракции. Подробнее данный способ генерации фазовых масок исследуется в третьей главе настоящей диссертации. Как видно из компьютерных расчетов, ступенчатое преобразование фазы приводит к возрастанию максимумов для сверток более высоких мод (исключая нулевую).

Сильное несовпадение формы распределений на рисунках 2.21 и 2.22 для профилей мод  $TEM_{2,0}$  и  $TEM_{3,0}$  возможно связано с тем, что получение «скрытых» изображений производилось не в дальней зоне. В дальней зоне производить измерения не представлялось возможным из-за малого размера изображения после объектива  $C2 \sim 5$  мкм.

## 2.8. Выводы по второй главе

Во второй главе исследовались пространственные корреляционные свойства квазитеплового источника. Обзор теоретических работ показал, что при использовании модели Шелла [26] пространственная корреляционная функция второго порядка по интенсивности может быть представлена в виде, схожем с разложением Шмидта, рассматриваемым в первой главе. Таким образом, квазитепловое поле обладает всеми пространственными корреляционными зависи-

мостями, что и бифотонное. Отличие заключается в количественной мере наблюдаемых корреляций  $g^{(2)}$ . В случае бифотонного поля  $g^{(2)}$  может достигать значений сотен и более, в то время как максимальная величина  $g^{(2)}$  для квазитеплого источника ограничена  $g^{(2)} \leq 2$ .

Был проведен аналитический расчет пространственной корреляционной функции с учетом передаточных характеристик основных оптических элементов экспериментальной установки по исследованию пространственного спектра квазитеплого поля.

Была собрана экспериментальная установка и исследовано квази-разложение Шмидта для теплового поля базисе мод Эрмита-Гаусса.

Анализ экспериментальных данных с учетом экспериментальных погрешностей измерения, а также с учетом технических ограничений экспериментальной установки, позволяет сделать вывод о хорошем согласии с теоретической моделью, распариваемой в начале главы.

Результаты второй главы опубликованы в работе [41].

# Томография детектора пространственных мод

Анализ модового состава пространственно многомодового пучка является важной основополагающей задачей как для классической, так и для квантовой оптики, где использование пространственных степеней свободы вызывает все больший интерес в задачах пространственного модового кодирования и мультиплексирования. Так, например, использование мультиплексирования пространственных мод позволяет многократно увеличить скорость передачи информации по классическому открытому [75], или волоконному [76] каналам связи. В квантовой оптике на сегодняшний день наиболее часто встречается использование углового орбитального момента фотона, находящегося в пространственной моде Лагерра-Гаусса, с целью создания высокоразмерных протоколов квантовой коммуникации [77].

В отличие от задачи генерации пространственных мод высоких порядков, для которой существуют несколько проверенных подходов, задача о детектировании пространственных мод на сегодняшний день до конца не решена. Одним из подходов к ее решению является обращение детектируемой моды высокого порядка в фундаментальную гауссову моду, а затем – использование модового фильтра, в качестве которого удобно использовать одномодовое волокно. На языке квантовой механики такой модовый детектор, если бы он работал идеально, соответствовал бы идеальному проекционному измерению. К сожалению, на практике невозможно выполнить полное преобразование детектируемой моды в гауссову [78], поэтому такое измерение не соответствует точному проектору и для описания измерения необходимо применять POVM (positive-operator valued measure) разложение. Данное разложение уже использовалось в задаче самокалибрующей томографии, рассматриваемой в первой главе диссертационной работы.

В текущей главе рассматривается оригинальный подход для экспериментального восстановления POVM элементов реального детектора пространственных мод, применимый для большинства используемых на сегодняшний день типов фазовых голограмм. Полученные результаты позволяют количественно охарактеризовать неидеальность модового детектора, что крайне важно при использовании подобных детекторов в задачах квантовой томографии состояний или процессов.

### 3.1. Генерация и детектирование пространственных мод

Перед тем как рассматривать методы детектирования поперечных пространственных мод поля (далее просто мод), обратимся к методам их генерации при помощи голограммной техники. На рисунке 3.1 приведена типичная экспериментальная установка по созданию пространственных мод. На ней когерентный гауссов пучок отражается от фазовой голограммы, в результате чего после отражения, в дальней дифракционной зоне наблюдается желаемое поперечное распределение поля. Существуют различные типы фазовых голограмм. Это могут быть фотопленки или специально созданные поверхности с фазовыми дислокациями (именуемые q-plates в иностранной литературе). В текущей работе рассматриваются фазовые голограммы, получаемые при помощи пространственного фазового модулятора света (SLM).

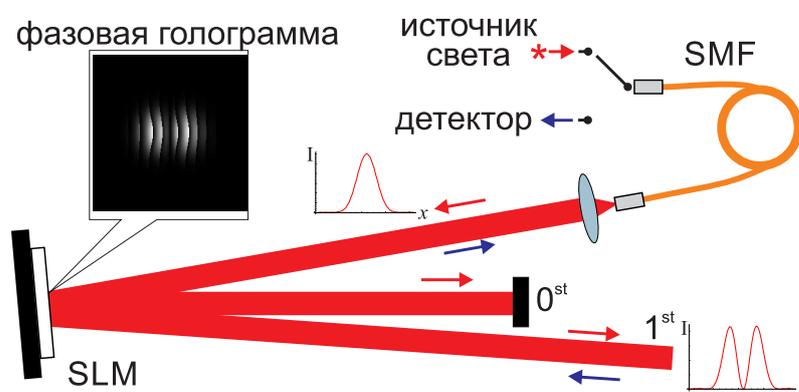


Рис. 3.1. Установка для генерации и детектирования поперечных мод высших порядков. SMF - одномодовое волокно, SLM - пространственный модулятор света.

Будем считать, что поляризация падающего на SLM электромагнитного поля фиксирована и не изменяется при его дальнейшем распространении. Таким образом, говоря о поле будем иметь в виду его скалярную пространственную часть. Наиболее широко используемыми являются базисы поперечных мод Эрмита-Гаусса (ЭГ) и Лагерра-Гаусса (ЛГ), являющие собой решения волнового уравнения в парааксиальном приближении для свободного пространства в декартовых и полярных координатах соответственно.

Поперечное распределение поля для мод ЭГ для случая плоского волнового фронта имеет вид:

$$HG_{mn}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2 2^{m+n} n! m!}} H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_0}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w_0}\right) \times \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right), \quad (3.1)$$

здесь  $H_{m,n}$  – полиномы Эрмита,  $x$  и  $y$  – координаты в поперечном сечении пучка,  $w_0$  – радиус пучка. Аналогичное распределение в базисе мод ЛГ имеет вид:

$$LG_p^l(\rho, \phi) = (-1)^p \sqrt{\frac{2p!}{\pi w_0^2 (p + |l|)!}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w_0}\right)^{|l|} L_p^{|l|}\left(2\frac{\rho^2}{w_0^2}\right) \times \exp(-il\phi), \quad (3.2)$$

в этом выражении  $L_p^{|l|}$  – присоединенные полиномы Лагерра,  $\rho$  и  $\phi$  радиус и полярный угол в плоскости сечения пучка соответственно.

Оба этих распределения могут легко быть переписаны в комплексной форме, состоящей из амплитудной огибающей и фазового множителя. Для управления амплитудой в дальней зоне можно использовать фазовую дифракционную решетку с различной глубиной модуляции в поперечном направлении (как это показано на примере голограмм на Рис. 3.1). Таким образом, используя суперпозицию фазовой дифракционной решетки с различной глубиной модуляции и фазовой модуляции в ближней зоне, можно сформировать требуемое пространственное распределение поля в дальней зоне (в направлении первого порядка

дифракции). Облекая сказанное выше в математическую форму общий вид фазового профиля на голограмме может быть представлен как:

$$\phi(\xi, \eta) = M(\xi, \eta) \bmod_{2\pi} \left( F(\xi, \eta) + \frac{2\pi\xi}{\Lambda} \right), \quad (3.3)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  – координаты в плоскости фазовой голограммы,  $M(\xi, \eta)$  – нормированная амплитуда голограммы ( $0 \leq M \leq 1$ ),  $F(\xi, \eta)$  – некоторая функция амплитуды и фазы генерируемой голограммы,  $\Lambda$  – период фазовой дифракционной решетки - эшелетта (использование эшелетта позволяет увеличить эффективность перекачки энергии в первый порядок дифракции). Как это было показано в работе [27], для наилучшей генерации мод, функции  $M(\xi, \eta)$  и  $F(\xi, \eta)$  должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} M &= \text{sinc}(\pi(A(\xi, \eta) - 1)), \\ F &= \Phi(\xi, \eta) - \pi A(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (3.4)$$

Где  $A(\xi, \eta)$  и  $\Phi(\xi, \eta)$  – нормированные амплитуда и фаза искомого поля в дальней зоне  $E(x, y)$ , то есть  $A(\xi, \eta) = |\mathcal{F}[E(x, y)]|$ ,  $\Phi(\xi, \eta) = \text{Arg}(\mathcal{F}[E(x, y)])$ ,  $\mathcal{F}$  – Фурье-образ.

Рассмотренная выше процедура генерации мод может быть легко обращена в результате можно получить детектор пространственных мод [79, 80]. Детектор работает следующим образом: если падающая на него мода соответствует выбранной фазовой голограмме на SLM, она будет переведена в первом порядке дифракции в фундаментальную моду (с незначительными искажениями, о которых речь пойдет ниже) и затем отфильтрована пространственной модой одномодового волокна. Если же на SLM голограмма соответствовала другой ожидаемой моде, то после отражения от данной голограммы в первом порядке дифракции в дальней зоне будет сформирована мода ортогональная моде волокна, и детектор не зарегистрирует сигнала после него. На языке квантовой механики такие детекторы реализуют проекционные измерения в базисе пространственных мод, но возникает вопрос: насколько в эксперименте близ-

ки подобные измерения к проекционным? Ответ на этот вопрос может дать процедура квантовой томографии детектора [30], позволяющая однозначно восстановить отклик детектора в заданном базисе.

Для описания POVM разложения модового фильтра здесь и далее будут использоваться дираковские обозначения. Сперва рассмотрим идеальный модовый фильтр, который осуществляет проекционное измерение на некоторую моду  $|\psi_n\rangle$ . POVM разложение для такого идеального фильтра будет состоять из набора одномерных ортогональных проекторов  $\pi_n = |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$ . В общем виде пространственное состояние падающего на детектор поля может быть представлено матрицей плотности  $\rho$ . Тогда вероятность задетектировать фотон в моде  $n$  задается правилом Бора:  $P_{\rho,n} = \text{Tr}(\rho\pi_n)$ . Если падающее поле находится в чистой пространственной моде  $|\psi_m\rangle$ , вероятностное распределение на выходе детектора  $P_{m,n} = \delta_{n,m}$ . Но в реальных экспериментах модовые фильтры не являются идеальными, поэтому соответствующие им POVM элементы должны иметь более сложную структуру:

$$\tilde{\pi}_n = \sum_{k,p} \theta_{k,p}^{(n)} |\psi_k\rangle\langle\psi_p|. \quad (3.5)$$

В этом выражении коэффициенты  $\theta_{k,p}^{(n)}$  должны быть установлены на основе экспериментальных измерений. Однако, непосредственное измерение этих коэффициентов является не простой многофакторной задачей, так как несет в себе необходимость генерации выбранной моды  $|\psi_m\rangle$ . Однако сам по себе процесс генерации пространственной моды также не идеален, таким образом, экспериментально отделить ошибки при генерации от ошибок при детектировании крайне сложно. Предлагаемое в текущей работе решение состоит в использовании некоторых калибровочных состояний, легкоготавливаемых в эксперименте и последующего статистического восстановления POVM элементов детектора по отклику модового фильтра на эти состояния [32].

Далее будем рассматривать детектор работающий в базисе Эрмита-Гаусса  $\varphi_{mn}$ . В этом случае в качестве калибровочных состояний  $|d_i\rangle$  удобно выбрать

гауссовы пучки с различным поперечным смещением:

$$\varphi_{00}(x - d_i, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2}} \exp\left(-\frac{(x - d_i)^2 + y^2}{w^2}\right), \quad (3.6)$$

здесь индекс  $i$  нумерует дискретный номер поперечного смещения  $d_i$ , ( $i = \{0, \dots, D-1\}$ ). При таком выборе калибровочных состояний можно произвести разделение переменных и задача в базисе мод ЭГ сводится к одномерной. Без ограничения общности можно положить индекс  $m = 0$ . Вероятностный отклик идеального детектора на такое калибровочное состояние может быть посчитан аналитически:

$$\begin{aligned} P_{d_i, n} = \langle d_i | \pi_n | d_i \rangle &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi w^2}} e^{-\frac{(x-d_i)^2 + y^2}{w^2}} \varphi_{n0}(x, y) dx dy \right|^2 \\ &= \frac{d_i^{2n}}{w^{2n} n!} \exp\left(-\frac{d_i^2}{w^2}\right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для случая неидеального детектора данное распределение приобретает вид:

$$P_{d_i, n} = \exp\left(-\frac{d_i^2}{w^2}\right) \sum_{k, p=0}^M \frac{d_i^{k+p}}{w^{k+p} \sqrt{k! p!}} \theta_{kp}^{(n)} = \sum_{k, p=0}^M F_{i, kp} \Pi_{kp, n}, \quad (3.8)$$

где тензоры  $F_{i, kp}$  и  $\Pi_{kp, n}$  выражаются как:

$$F_{i, kp} = \exp\left(-\frac{d_i^2}{w^2}\right) \frac{d_i^{k+p}}{w^{k+p} \sqrt{k! p!}}; \quad \Pi_{kp, n} = \theta_{kp}^{(n)}.$$

Целью экспериментального исследования являлось восстановление тензора коэффициентов  $\Pi \in \mathbb{C}^{M \times M \times N}$  из экспериментально измеряемой матрицы вероятностей  $P \in \mathbb{R}^{D \times N-1}$ , где  $N-1$  – число детектируемых мод,  $M$  – число мод, используемое в POVM разложении (3.5),  $D$  – число дискретных положений смещенной калибровочной гауссовой моды. Как это было продемонстрировано в работах [30, 32], для получения хорошего согласия с экспериментом достаточно использовать упрощенный тензор  $\Pi_{k, n} = \theta_{kp}^{(n)} \delta_{kp}$ . Таким образом, экспериментальное восстановление элементов POVM сводится к задаче оптимизации:

$$\min \|P - F\Pi\|, \quad \Pi_n \geq 0, \quad \sum_{n=0}^{N-1} \Pi_n = \mathbb{1}, \quad (3.9)$$

где матричная норма определяется как  $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} |A_{i,j}|^2}$ .

### 3.2. Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки представлена на рисунке 3.2. Ослаб-

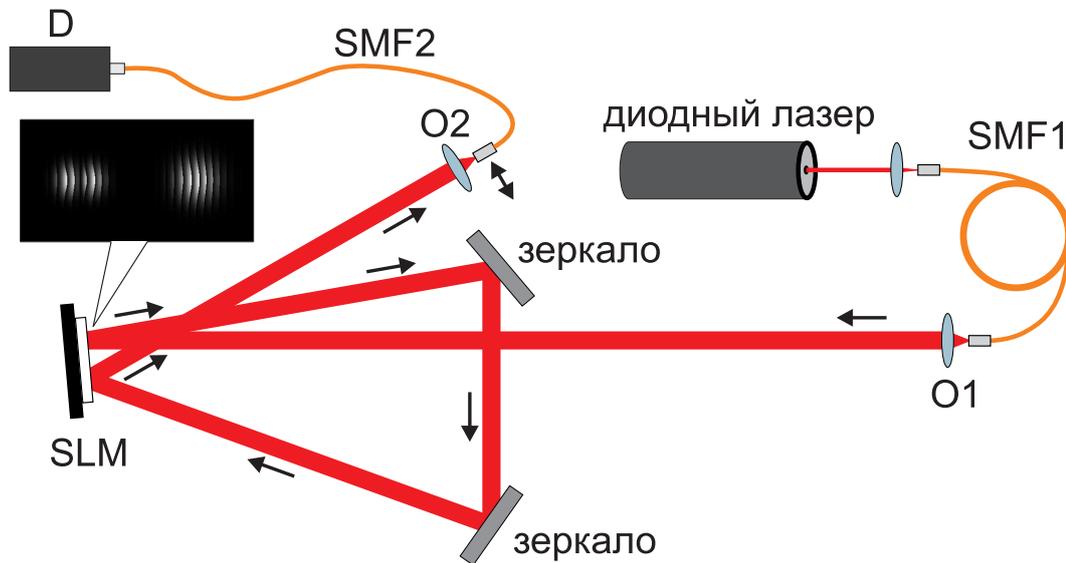


Рис. 3.2. Схема экспериментальной установки для проведения томографии детектора пространственных мод. Один и тот же фазовый модулятор используется для приготовления гауссова пучка определенного диаметра, и как часть модового фильтра.

ленное излучение диодного лазера с длиной волны 405 нм пространственно отфильтровывалось с помощью одномодового волокна SMF1 и коллимировалось в параллельный пучок 8-х кратным объективом O1. Радиус пучка управлялся при помощи фазовой голограммы, поданной на правую часть SLM. Для контроля радиуса пучка с сохранением пространственного гауссова профиля фазовая маска вырезала более узкий гауссов профиль и перенаправляла излучение в первый дифракционный порядок. Далее, пучок заданного радиуса в первом порядке дифракции отражался от второй половины SLM, на которую подавалась детектирующая фазовая голограмма. Первый дифракционный порядок после второго отражения от SLM фокусировался в одномодовое волокно SMF2 при помощи 20-ти кратного объектива O2. Таким образом, на торце одномодового волокна после объектива O2 формировалась дальняя дифракционная зона.

Излучение после одномодового волокна регистрировалось счетным фотодетектором D.

Вместо параллельного сдвига гауссова пучка в ближней зоне на практике более удобно использовать перемещение положения фильтрующей гауссовой моды (перемещая торец волокна SMF2 в поперечном направлении). Такое перемещение вызывает наклон пучка в ближней зоне, при этом в выражении (3.8) изменится только масштабирующий множитель  $w$ , а под  $d_i$  в этом случае нужно понимать положение торца волокна в фокальной плоскости объектива.

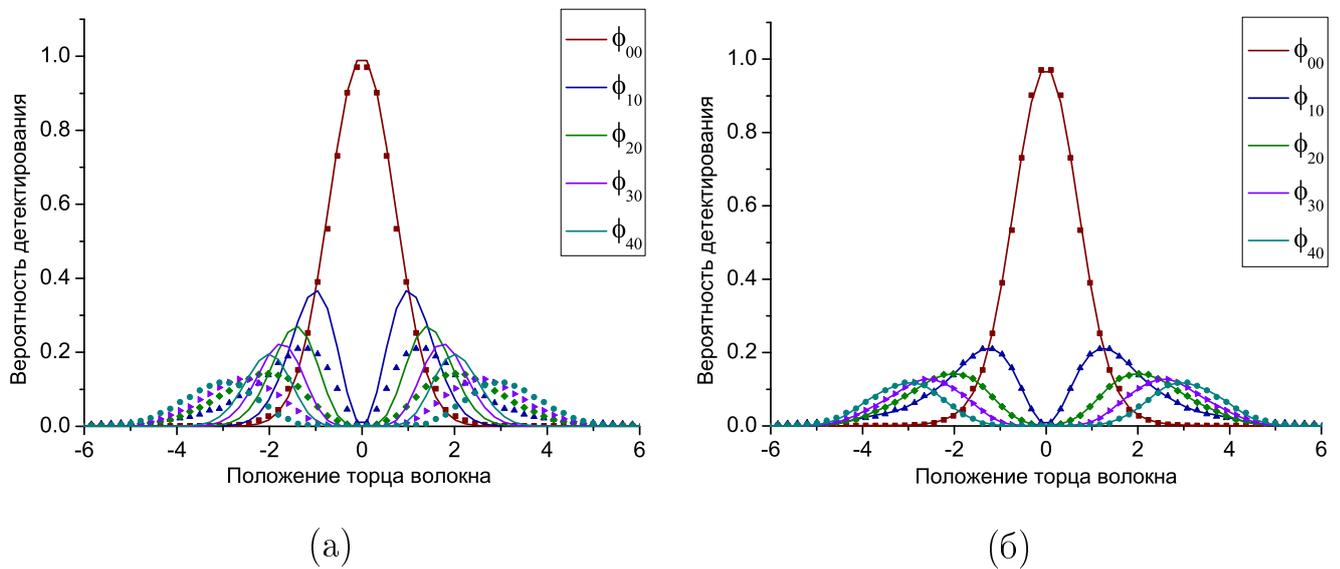


Рис. 3.3. Распределение вероятности детектирования для первых пяти фазовых голограмм, соответствующих модам  $\phi_{n,m}$ , с индексами  $n = 0 \dots 4$  и  $m = 0$ . По горизонтальной оси отложено положение торца одномодового волокна  $\delta_i$  в дальнем поле фазовой голограммы, соответствующее наклону фильтрующей гауссовой моды на угол  $\theta_i = \delta_i/f$ , где  $f = 8$  мм – фокальное расстояние объектива. Положение отложено в безразмерном виде  $\delta_i/w$ , где  $w = (1.871 \pm 0.007)$  мкм – радиус моды волокна. Точки соответствуют экспериментальным данным, полученным без использования амплитудной модуляции на фазовой голограмме, непрерывные линии соответствуют теоретическому расчету распределения вероятности для мод ЭГ (а) и распределению вероятности, рассчитанному с использованием экспериментально восстановленных ROVM элементов (б).

Для проведения томографии детектора в работе исследовались фазовые голограммы как с использованием амплитудной модуляции в выражении (3.3), так и без нее.

Экспериментально измеренные распределения вероятностей детектирования приведены на рисунке 3.3. Учитывая тот факт, что дифракционная эффективность зависит от номера детектируемой моды, производилась перенормировка полученных распределений так, чтобы интегральная интенсивность была одинакова для всех мод. Сравнивая экспериментальные данные с теоретическими распределениями (непрерывные линии на рис. 3.3(a)), наблюдается сильное расхождение с ростом номера моды. Элементы POVM, полученные в результате реконструкции, показаны на рис. 3.4(a). Несоответствие между детектируемыми и ожидаемыми идеальными модами Эрмита-Гаусса выражается в наличии множества недиагональных элементов. Используя восстановленные значения коэффициентов  $\theta_{kp}^{(n)}$  были рассчитаны распределения вероятности, учитывающие неидеальность детектора. Данные распределения представлены на рис. 3.3(b). Рассчитанный коэффициент корреляции между экспериментальной и восстановленной вероятностями равен  $R_{rec}^2 = 0.9992$ , в то время, как этот коэффициент  $R_{th}^2 = 0.8632$ , если предположить, что детектор идеален (рис. 3.3). В случае использования голограмм с амплитудной модуляцией эти коэффициенты равны  $R_{rec}^2 = 0.9848$  и  $R_{th}^2 = 0.9647$  соответственно. На рисунке 3.4(б), приведена матрица коэффициентов  $\theta_{kp}^{(n)}$  для случая использования амплитудной модуляции.

После получения POVM элементов реального детектора можно численно охарактеризовать его «неидеальность», сравнивая это распределения с тензором  $\tilde{\theta}_{kp}^{(n)} = \delta_{nk}\delta_{kp}$  для идеального детектора пространственных мод. Удобной мерой для сравнения вероятностей является мера *similarity*, которая может быть определена как:  $S = \left( \sum_{nkp} \sqrt{\theta_{kp}^{(n)} \tilde{\theta}_{kp}^{(n)}} \right)^2 / \sum_{nkp} \theta_{kp}^{(n)} \sum_{nkp} \tilde{\theta}_{kp}^{(n)}$ . Величины *similarity* для POVM элементов в случае использования только фазовой и в случае использования амплитудной и фазовой модуляции получились равными  $S_{ph} = 0.19$  и  $S_{amp} = 0.73$ , соответственно.

Для того, чтобы удостовериться, что наблюдаемые особенности POVM распределений не являются артефактом метода реконструкции было произведено

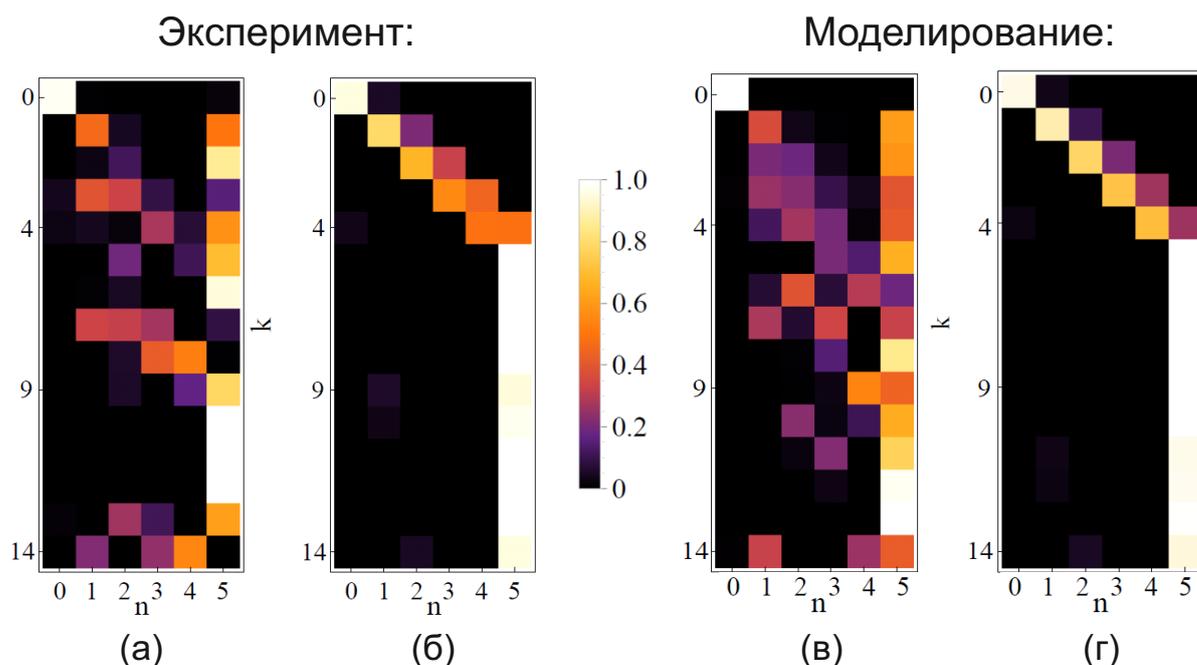


Рис. 3.4. Диагональные элементы восстановленной POVM матрицы в базисе мод Эрмита-Гаусса  $\Pi_{n,kk}$ : полученные без использования амплитудной модуляции (а), и с использованием амплитудной и фазовой модуляции (б); POVM элементы, вычисленные по данным численного моделирования дифракции в дальней зоне, для голограмм без (в) и с использованием (г) амплитудной модуляцией.

численное моделирование детектора пространственных мод. Для этого вычислялось пространственное распределение поля в дальней зоне после фазовой голограммы, после чего вычислялась свертка этого поля с гауссовой модой волокна. Численно полученные вероятности детектирования в зависимости от положения моды волокна использовались как исходные данные для процедуры реконструкции экспериментальных POVM элементов. Результаты численной симуляции приведены на рис. 3.4(в) и рис. 3.4(г) для случаев только фазовой и фазово-амплитудной модуляции. Заметно, что POVM элементы, восстановленные по данным численного моделирования, качественно повторяют эксперимент. Величины *similarity* для случая численного моделирования получились равными  $S_{ph} = 0.86$  и  $S_{amp} = 0.98$ , соответственно.

Изначально алгоритм расчета фазовых голограмм был реализован на языке C++, так что вычисление фазы производилось последовательно от пикселя

к пикселю. Время вычисления голограммы размером  $1024 \times 768$  пикселей составляло около 85 мс, при этом процесс вывода изображения из оперативной памяти на пространственный модулятор света занимал около 400 мс. Существенное время на вычисления голограмм сильно замедляло процесс томографии. Впоследствии вычислительный алгоритм был переписан с использованием библиотеки параллельного программирования CUDA, вычисления производились на графической карте (Nvidia Geforce 720 GTX), что позволило существенно сократить время расчета голограмм, которое вместе с выводом изображения на пространственный фазовый модулятор снизилось до 14 мс.

### 3.3. Выводы к третьей главе

В главе предложен оригинальный метод калибровки детектора пространственных мод. Ключевой особенностью метода является то, что отклик детектора на какую либо входную пространственную моду высшего порядка может быть измерен без приготовления этой входной моды (без эталонная калибровка). Также метод не использует информации о внутреннем устройстве калибруемого детектора и не требует проведения расчетов для распространяющегося в нем светового поля. Все систематические погрешности детектора автоматически учитываются при восстановлении POVM разложения.

Получив описание отклика детектора в базисе мод ЭГ, отклик данного детектора может быть легко пересчитан в любом другом наборе базисных мод без необходимости дополнительной калибровки.

Помимо прикладного интереса, проведенный эксперимент позволяет сделать фундаментальный вывод: что использование дополнительной амплитудной модуляции при генерации фазовых голограмм существенно приближает проекционные измерения детектора к идеальным проекторам на базисные моды ЭГ.

Результаты третьей главы опубликованы в работе [43].

# Интерференция бифотонных полей в схеме Юнга

В данной главе рассматривается квантовая интерференция двухфотонных полей. Данная тема изучается уже на протяжении 15 лет, тем не менее она не утратила своей актуальности. Актуальность данной тематики связана с преодолением дифракционного предела за счет использования многофотонной интерференции в схемах квантовой литографии [36, 81]. На сегодняшний день использование неклассических состояний света также широко применяется на практике при создании оптических сенсоров [82, 83].

Первоначальные работы по преодолению дифракционного предела основывались на классических световых источниках. Полученное в них сверхразрешение нивелировалось сильным падением видности получаемого изображения. Однако после разработки схемы квантовой литографии было получено сверхразрешение без потери видности [33]. Следует отметить, что интерференция квантовых полей не исчерпывается одними лишь схемами квантовой литографии и преодолением дифракционного предела, также она обладает свойствами принципиально недоступными в классике.

Интерференция перепутанных пар фотонов приводит к формированию сложных распределений в корреляционной функции, различных в зависимости от вида квантового состояния. В зависимости от этих состояний интерференционные распределения могут быть как чувствительны, так и не чувствительны к дополнительной фазе, вносимой в один из двух источников схемы Юнга. Данная часть посвящена исследованию двухфотонных интерференционных корреляций и их зависимости от фазы для различных квантовых состояний.

## 4.1. Теоретическое описание

На протяжении долгого времени считалось, что максимальное разрешение любой оптической схемы определяется критерием Релея, который говорит об ограничении оптического разрешения дифракционным пределом, зависящим от длины волны света. Таким образом, чтобы добиться большей разрешающей способности схемы, нужно работать с более коротковолновыми источниками, что является сложной технической задачей, кроме того, начиная с некоторого значения длины волны энергия облучающих квантов света возрастает настолько, что излучение может повредить исследуемый образец.

В попытках преодолеть дифракционный предел был предложен ряд схем по оптической литографии, основанный на классических эффектах [84, 85]. Данные схемы обладают существенным недостатком – сильным спаданием видности при увеличении оптического разрешения. Однако, как это впервые было показано в работе [33], если использовать  $N$  перепутанных фотонов, то можно в  $N$  раз улучшить оптическое разрешение схемы без потери в видности. Системы квантовой литографии, основанные данным принципе, исследуются в текущей главе.

Изначально существовали две теоретические концепции, предсказывающие различное поведение двухфотонных корреляций в схеме квантовой интерференции. Позднее экспериментальная работа [86] позволила подтвердить одну из теорий.

Простейший пример схемы квантовой литографии, основанный на классической схеме Юнга, приведен на рисунке 4.1. Свет с длиной волны  $\lambda$  падает на двойную щель с расстоянием между щелями  $d \gg \lambda$ . Дифракционная картина формируется в плоскости на расстоянии  $R \gg d$ , на которой располагаются  $S + 1$  детектор. Размер каждого детектора равен  $b$ , и этот размер на много меньше, чем характерное расстояние между максимумами дифракционной картины на этом расстоянии от двойной щели. В однофотонном случае состояние после

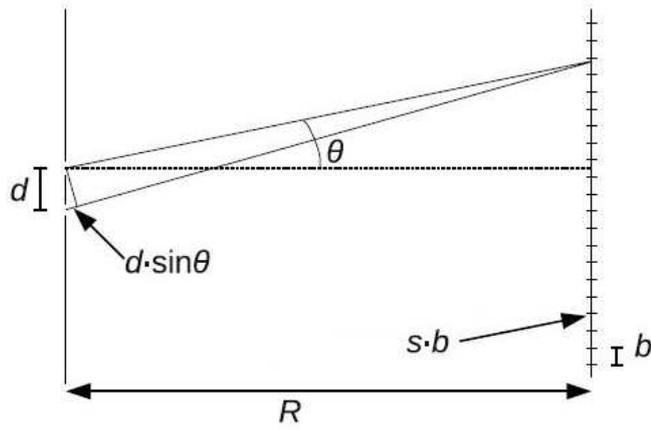


Рис. 4.1. Схема Юнга, применяемая в классической и квантовой литографии

щели может быть записано в виде [86]

$$|\Psi_{1,n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_u \otimes |0\rangle_d + |0\rangle_u \otimes |1\rangle_d). \quad (4.1)$$

Состояние в детектируемой плоскости может быть записано как

$$|\Psi_{1,R}\rangle = \frac{1}{N_1} \sum_{s=-S/2}^{S/2} \left( e^{ikr(s)} \hat{a}_s^\dagger + e^{ik[r(s)+\Delta r(s)]} \hat{a}_s^\dagger \right) |0\rangle = \frac{1}{N_1} \sum_{s=-S/2}^{S/2} e^{ikr(s)} \left[ 1 + e^{ik\Delta r(s)} \right] \hat{a}_s^\dagger |0\rangle, \quad (4.2)$$

где  $N_1 = \sqrt{2(S+1)}$ , суммирование ведется по всем детектируемым модам  $s$ ,  $k$  - волновой вектор падающей световой волны,  $r(s) = \sqrt{R^2 + s^2 b^2} \approx R \left( 1 + \frac{s^2 b^2}{2R^2} \right)$ , и  $\Delta r(s) = s \sin(\theta) \approx d\theta = dbs/R$ . Вероятность обнаружить фотон на детекторе с номером  $s$  есть

$$P_{1,R} = \langle \Psi_{1,R} | \Psi_{1,R} \rangle \propto \cos^2 \left( \frac{kdb s}{2R} \right). \quad (4.3)$$

Расстояние между двумя пиками в получаемой интерференционной картине задается выражением  $\lambda_0 R/d$ , где  $\lambda_0$  - длина волны падающего света. Для простоты изложения предположим, что щели очень узкие, следовательно нет падения вероятности  $P_{1,R}$  с увеличением  $|s|$ . В случае квантовой литографии нас будет интересовать не однофотонное распределение в анализируемой плоскости, а распределение корреляций из  $N$  фотонов. Далее в работе будем полагать  $N = 2$ . Пусть имеется состояние, в котором пара фотонов падает независимо на

одну из двух щелей на рисунке 4.1, называемое NOON состоянием. То есть нет пар коррелирующих фотонов, для которых один попал в верхнюю щель, а другой - в нижнюю. Сразу после двойной щели NOON состояние можно записать в виде

$$|\Psi_{2,n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2\rangle_u \otimes |0\rangle_d + |0\rangle_u \otimes |2\rangle_d). \quad (4.4)$$

Экспериментально такое состояние можно получить в процессе спонтанного параметрического рассеяния путем установки двойной щели после тонкого нелинейного кристалла с синхронизмом типа I, работающего в коллинеарном, вырожденном по частоте режиме. Малая толщина кристалла необходима, чтобы угловой спектр параметрического рассеяния при заданной частоте на выходе из кристалла был уже, чем угловой размер схемы Юнга, наблюдаемой из центра нелинейного кристалла. Необходимо, чтобы размер перетяжки накачки внутри кристалла был больше, чем расстояние между щелями  $b$ . Также необходимо, чтобы щели находились симметрично относительно оси пучка накачки. Подобная экспериментальная реализация была использована в работе [87]. Теоретические предсказания о результирующем виде волновой функции в детектируемой плоскости сильно различались в работах [33] и [88]. В работе [33] отмечается, что для первого фотона вероятность достигнуть детектируемого объема  $s$  пропорциональна интенсивности падающего на двойную щель света, а оставшиеся  $N - 1$  фотон обязаны оказаться в этом же детектируемом объеме в то же время (концепция  $N$  фотонных волн де Бройля [89]). Состояние в детектируемой плоскости в таком теоретическом ключе есть

$$|\Psi_{B,R}\rangle = \frac{1}{N_B} \sum_{s=-S/2}^{S/2} e^{i2kr(s)} \left[ 1 + e^{i2k\Delta r(s)} \right] (\hat{a}_s^\dagger)^2 |0\rangle, \quad (4.5)$$

где  $N_B = \sqrt{4(S+1)}$ , и расстояние между двумя пиками двухфотонных корреляций получается равным  $\lambda_0 R / (2d)$ , что в два раза меньше, чем в классическом случае, также подобное состояние означает отсутствие корреляций между разными детекторами ( $s \neq t$ ), что будет подробнее рассмотрено дальше. В отличие

от работы [33], в работе [88] считается, что коррелированные фотоны могут дифрагировать независимо, то есть попадание одного фотона на детектор  $s$ , не означает, что остальные  $N - 1$  коррелированные с ним должны попасть на него в тот же момент времени. Поэтому состояние в детектируемой плоскости может быть переписано в виде

$$|\Psi_{St,R}\rangle = \frac{1}{N_{St}} \sum_{s=-S/2}^{S/2} \sum_{t=-S/2}^{S/2} \left( e^{ik[r_1(s)+r_1(t)]} \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_t^\dagger + e^{ik[r_2(s)+r_2(t)]} \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_t^\dagger \right) |0\rangle, \quad (4.6)$$

где

$$r_{1,2}(s) = R \left( 1 + \frac{s^2 b^2}{2R^2} \right) \mp \frac{db}{2R} s \quad (4.7)$$

это расстояние от верхней и нижней щели соответственно, и  $N_B = \sqrt{2}(S + 1)$ . Работа [88] не является единственной в своем роде, ее концепция сходна с первоначальной работой [90], в которой было показано, что бифотонные пары, рожденные в процессе СПР, дают синусоидальное распределение корреляционной функции второго порядка по интенсивности и при  $s \neq t$ .

Первыми экспериментальными работами в области квантовой литографии являются работы [91] и [87], однако их результаты не позволяют говорить о наличии или отсутствии корреляций при  $s \neq t$ , что подтвердило бы одну из теорий, так как в этих работах исследовалось распределение двухфотонных корреляций только при  $s = t$ .

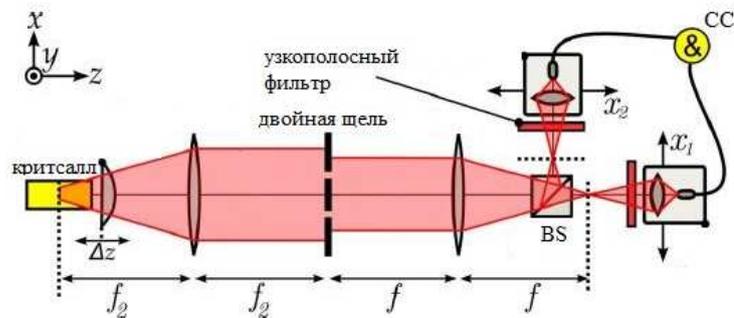


Рис. 4.2. Экспериментальная схема квантовой литографии

Перейдем к рассмотрению экспериментальной работы [86], подтверждающей концепцию предложенную в работе [88]. Схема экспериментальной установки представлена на рисунке 4.2. Состояние  $|\Psi_{2,n}\rangle$  генерировалось нелинейным кристаллом РРКТР (периодически поляризованный КТiОРО4) длиной 1 мм, установленным после двойной щели. Для наблюдения двухфотонных корреляций при различных значениях  $x_1 = s$  и  $x_2 = t$ , исследуемый пучок разбивался на 2 при помощи неполяризованного светоделителя 50/50 (BS). В проходящем канале точечный детектор ( $b \ll \lambda_0 R/(2d)$ ) помещался в координату  $x_1$ , в отраженном канале такой же детектор помещался в позицию  $x_2$ . Совпадения отсчетов обоих детекторов регистрировались при помощи схемы совпадений СС.

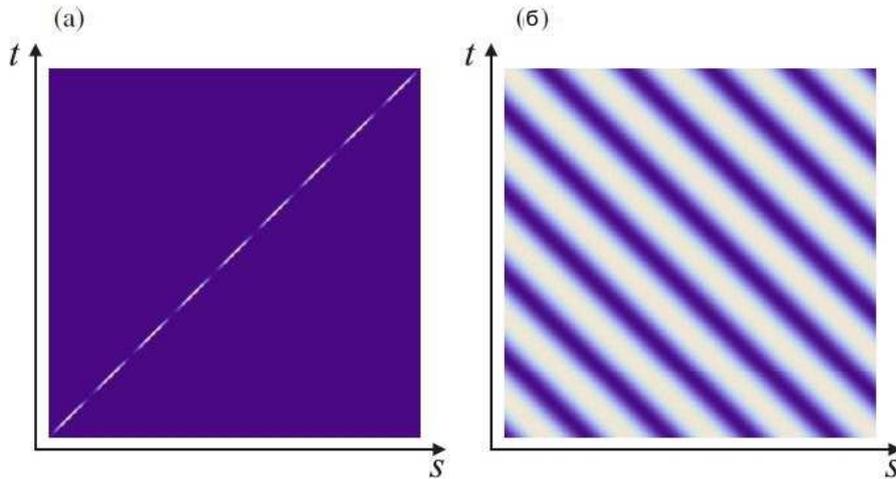


Рис. 4.3. Распределения двухфотонных корреляций в зависимости от положений детекторов  $s$  и  $t$ , для двух различных теоретических концепций (а) и (б), описанных в работах [33] и [88] соответственно.

Распределения вероятностей двухфотонных корреляций для двух теорий в зависимости от  $s$  и  $t$  приведены на рисунке 4.3. Из формулы (4.5) следует, что вероятность двухфотонного события (Рис. 4.3 (а)) пропорциональна

$$P_{B,R} \propto \cos^2\left(\frac{kdb s}{R}\right) \delta(s - t). \quad (4.8)$$

В случае другой теоретической концепции (Рис. 4.3 (б)), из формулы (4.6) следует, что

$$P_{B,R} \propto \cos^2 \left( \frac{kdb}{2R} (s + t) \right). \quad (4.9)$$

Экспериментальные результаты работы [86] получились сходными с распределением представленным на рисунке 4.3 (б), что позволяет говорить о независимой дифракции каждого из пары коррелированных фотонов после двойной щели. Рассмотрим более подробный теоретический расчет для экспериментальной схемы, используемой в настоящей главе.

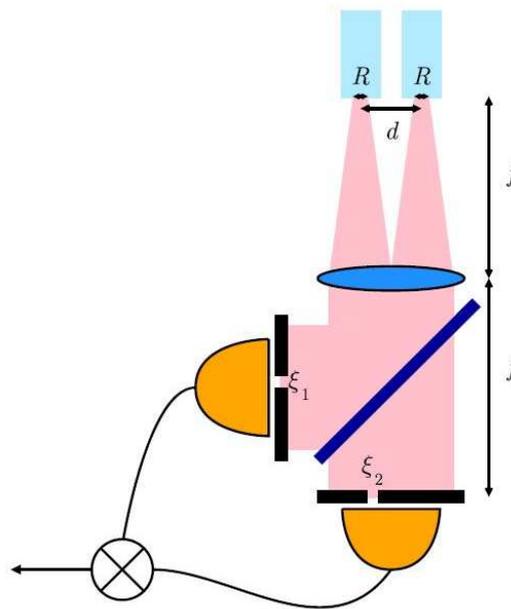


Рис. 4.4. Квантово-литографическая схема с использованием одномодовых источников

Пусть в отличие от двойной щели, квантовое состояние выходит из двух торцов одномодовых волокон (Рис. 4.4), находящихся на расстоянии  $d$  друг от друга, а ширина каждой из мод равна  $R$ . Одномодовые волокна идут параллельно вблизи их окончания, их торцы находятся в фокусе линзы с фокусным расстоянием  $f$ ,  $f \gg d$ . После линзы параллельный и уже продифрагировавший пучок из двух волокон разделяется при помощи светоделителя 50/50 и детектируется точечными детекторами, находящимися в плоскости расположения од-

номодовых волокон (детекторы передвигаются вдоль прямой, соединяющей источники в схеме Юнга), и имеющими координаты  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Обозначим состояние непосредственно после торцов волокон как  $\phi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ , где  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  - двумерные вектора в плоскости первого и второго торцов одномодовых волокон соответственно. В дальней зоне, после линзы, осуществляющей Фурье преобразование, состояние преобразуется в

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{-\lambda^2 f^2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{u}_1 d^2\mathbf{u}_2 \phi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \exp \left[ -\frac{2\pi i}{\lambda f} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{u}_2) \right]. \quad (4.10)$$

Вероятность совпадения двух фотоотсчетов, при том, что фотоны прошли через отверстия с радиус-векторами  $\mathbf{s}_1$  и  $\mathbf{s}_2$  после линзы и диаметром  $a$  можно записать как

$$P(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \int_{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{s}_1| \leq a} d\mathbf{r}_1 \int_{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{s}_2| \leq a} d\mathbf{r}_2 |\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2. \quad (4.11)$$

Если отверстия много меньше характерного размера  $|\psi(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)|^2$ , то вероятность можно считать пропорциональной

$$P(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \approx (\pi a^2)^2 |\psi(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)|^2. \quad (4.12)$$

В случае вертикальных щелей, находящихся в положениях  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , позволяющих собирать больше полезного сигнала (так как в силу симметрии схемы не может возникнуть интерференционная структура в вертикальной плоскости), вероятность можно представить в виде

$$\begin{aligned} P(\xi_1, \xi_2) &= \int_{\xi_1 - a/2}^{\xi_1 + a/2} dx_1 \int_{\xi_2 - a/2}^{\xi_2 + a/2} dx_2 \int dy_1 \int dy_2 |\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 \\ &\approx \int dy_1 \int dy_2 |\psi(\mathbf{r}_1 = \xi_1 \hat{\mathbf{x}} + y_1 \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{r}_2 = \xi_2 \hat{\mathbf{x}} + y_2 \hat{\mathbf{y}})|^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Рассмотрим конкретные состояния  $\phi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$  на выходе из одномодовых воло-

кон. Начнем с NOON состояния, записываемого в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|2, 0\rangle + e^{2i\theta}|0, 2\rangle) = \frac{1}{2} ((a^\dagger)^2 + e^{2i\theta}(b^\dagger)^2) |0\rangle,$$

$$a^\dagger \equiv \int d^2\mathbf{u} \Pi \left( \mathbf{u} + \frac{d}{2}\hat{\mathbf{x}} \right) A^\dagger(\mathbf{u}), \quad b^\dagger \equiv \int d^2\mathbf{u} \Pi \left( \mathbf{u} - \frac{d}{2}\hat{\mathbf{x}} \right) A^\dagger(\mathbf{u}). \quad (4.14)$$

Волновая функция NOON состояния в ближнем поле

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \Pi \left( \mathbf{u}_1 + \frac{d}{2}\hat{\mathbf{x}} \right) \Pi \left( \mathbf{u}_2 + \frac{d}{2}\hat{\mathbf{x}} \right) + \right. \\ & \left. + e^{2i\theta} \Pi \left( \mathbf{u}_1 - \frac{d}{2}\hat{\mathbf{x}} \right) \Pi \left( \mathbf{u}_2 - \frac{d}{2}\hat{\mathbf{x}} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.15)$$

где функция

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \exp \left( -\frac{|\mathbf{u}|^2}{4R^2} \right) \quad (4.16)$$

является пространственной модой волокна с эффективной шириной  $R$ , далее будем считать, что  $d \gg R$ . Используя это условие и выражение (4.10), состояние в дальней зоне после линзы можно рассчитать как

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = & -\frac{\sqrt{2}}{2\pi\sigma^2} \exp \left[ -\frac{1}{4\sigma^2} (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) \right] \times \\ & e^{i\theta} \cos \left[ \frac{\pi d}{\lambda f} (x_1 + x_2) - \theta \right], \end{aligned} \quad (4.17)$$

и

$$\begin{aligned} |\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 = & \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^2} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) \right] \times \\ & \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{2\pi}{\Lambda} (x_1 + x_2) - 2\theta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

в этих выражениях

$$\sigma \equiv \frac{\lambda f}{4\pi R} \quad (4.19)$$

– характерный размер локализации квантовой интерференционной картины, а

$$\Lambda \equiv \frac{\lambda f}{d} \quad (4.20)$$

– характерный период интерференции. Необходимо отметить, что хотя выражение для  $\Lambda$  совпадает с периодом для классической интерференционной картины, квантовые интерференционные полосы наблюдаются в направлении  $x_1 = x_2$

для этого состояния, поэтому реальный период равен  $\Lambda/2$ , то есть наблюдается явление сверхразрешения. Как видно из этих выражений, относительная фаза в NOON состоянии влияет на положение квантовых интерференционных полос.

Для состояния  $|1, 1\rangle$ , волновая функция которого в ближнем поле может быть записана как

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= a^\dagger b^\dagger |0\rangle, \\ \phi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &= \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \left[ \Pi \left( \mathbf{u}_1 + \frac{d}{2} \hat{\mathbf{x}} \right) \Pi \left( \mathbf{u}_2 - \frac{d}{2} \hat{\mathbf{x}} \right) + \right. \\ &\quad \left. \Pi \left( \mathbf{u}_1 - \frac{d}{2} \hat{\mathbf{x}} \right) \Pi \left( \mathbf{u}_2 + \frac{d}{2} \hat{\mathbf{x}} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.21)$$

и, после проведения расчета аналогично NOON состоянию, квадрат модуля волновой функции в дальней зоне переписывается в виде

$$|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^2} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) \right] \times \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{2\pi}{\Lambda} (x_1 - x_2) \right] \right\}. \quad (4.22)$$

Внешний вид распределений для NOON и  $|1, 1\rangle$  состояний приведен на рисун-

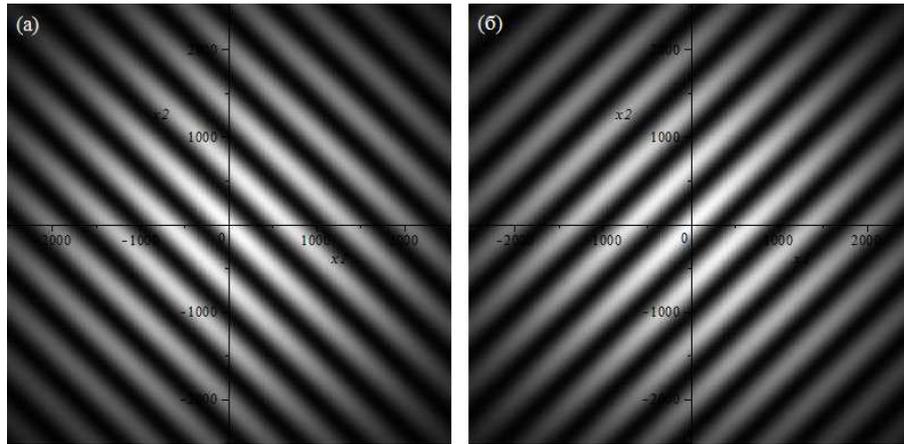


Рис. 4.5. Теоретические распределения интенсивности корреляций в зависимости от позиций детекторов  $x_1, x_2$ , для NOON (а) и  $|1, 1\rangle$  (б) состояний

ках 4.5 (а) и (б) соответственно, распределения рассчитаны при параметрах,

используемых в настоящем эксперименте:  $\lambda = 808$  нм;  $R = 2.3$  мкм;  $d = 72$  мкм;  $f = 60$  мм.

Следуя рекомендациям, приведенным в экспериментальной работе [92], в настоящем эксперименте удалось увеличить эффективность генерации квантовых состояний за счет оптимизации размера перетяжки накачки внутри нелинейного кристалла и за счет подбора оптики под теоретически рассчитанный спектр параметрического рассеяния, заводящей излучение в одномодовые волокна.

## 4.2. Приготовление квантовых состояний

Для приготовления квантовых состояний NOON и  $|1, 1\rangle$  в текущей работе использовалась широко распространенная схема (Рис. 4.6), состоящая из нелинейного кристалла ВВО типа II длиной 2 мм (Cr1), работающего в коллинеарном, вырожденном по частоте режиме. В качестве накачки использовался диодный лазер с длиной волны 407 нм. Излучение накачки фокусировалось в кристалл при помощи линзы L1 с фокусным расстоянием 200 мм. Дихроичное зеркало UVM служило для отсечения излучения накачки после кристалла. Для компенсации пространственного сноса и временной задержки сигнального и холостого фотонов, рожденных в кристалле, был установлен компенсатор Cr2, представляющий собой кристалл ВВО, аналогичный генерирующему, настроенный на коллинеарный, частотно вырожденный синхронизм типа II, но имеющий вдвое меньшую длину (1 мм). Оптическая ось компенсирующего кристалла устанавливалась сонаправленно с осью Cr1. Полуволновая пластинка HWP1 использовалась для ориентации поляризации накачки в вертикальной плоскости. Пластинка HWP2 поворачивала поляризации сигнального и холостого фотонов на  $90^\circ$  для правильной компенсации пространственного сноса и временной дисперсии в кристалле Cr2. Разделение на два оптических канала производилось поляризационным светоделителем PBS1. В проходящем кана-

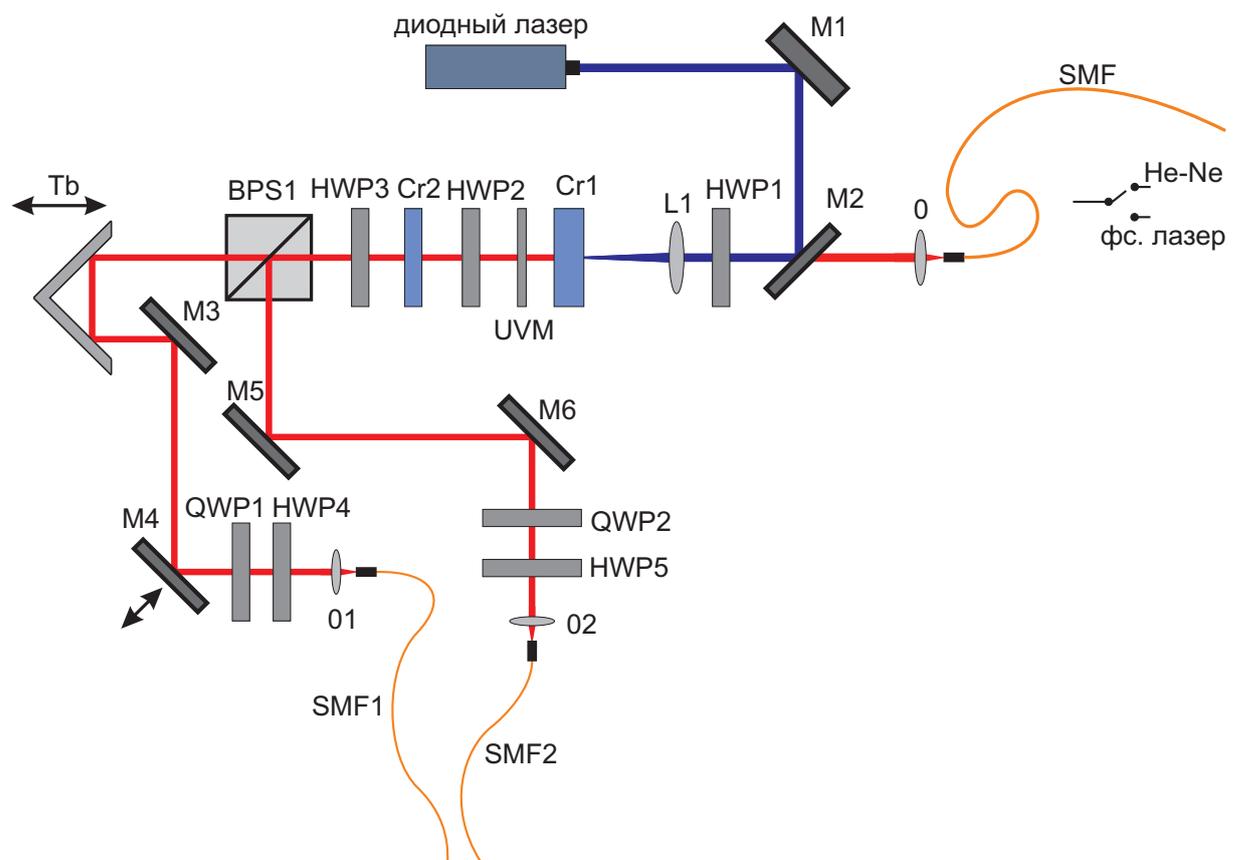


Рис. 4.6. Схема приготовления квантовых состояний

ле была установлена линия задержки, состоящая из тромбонной призмы Тб и зеркала М4, установленного на пьезоподачу для точного контроля фазы (минимального шага тромбона 0.5 мкм, соответствующего изменению оптического пути на 1 мкм, было не достаточно для точного контроля фазы). Излучение из обоих каналов заводилось в одномодовые волокна SMF1 и SMF2 при помощи объективов О1 и О2 с фокусным расстоянием 15.2 мм. Полуволновая пластинка HWP3 позволяла управлять поляризационным состоянием генерируемой бифотонной пары. В зависимости от угла поворота  $\alpha$  полуволновой пластинки HWP3 состояние в двух поляризационных модах  $|H, V\rangle$  может быть представлено в виде

$$|\phi\rangle = \frac{\sin(4\alpha)}{\sqrt{2}}(|2, 0\rangle + |0, 2\rangle) + \cos(4\alpha)|1, 1\rangle. \quad (4.23)$$

Таким образом, при значении угла  $\alpha = \pi/8$ , генерируется NOON состояние, при угле  $\alpha = 0$  – состояние  $|1, 1\rangle$ .

### 4.3. Экспериментальное наблюдение пространственных корреляций в схеме Юнга

Внешний вид установки по наблюдению квантовой интерференции приведен на рисунке 4.7. Для получения хорошей видности интерференционной картины производилось выравнивание поляризаций в вертикальной плоскости на выходе из одномодовых волокон SMF1 и SMF2 при помощи четверть волновых и полуволновых пластинок QWP1, HWP4 и QWP2, HWP5 в проходящем и отраженном от PBS1 каналах соответственно. Концы одномодовых волокон сводились параллельно на расстояние 72 микрона в специальной изготовленной фабрично кварцевой "игле". Торец "иглы" (где находились концы одномодовых волокон) располагался в фокусе асферической линзы с фокусным расстоянием  $f=60$  мм (Рис.4.7). После линзы располагался поляризационный светоделитель PBS2, отражающий вертикальную поляризацию, наведенную в одномодовых волокнах и не скомпенсированную четвертьволновыми и полуволновыми пластин-

ками в каналах подготовительной схемы (его установка позволила увеличить контраст интерференционной схемы на несколько процентов).

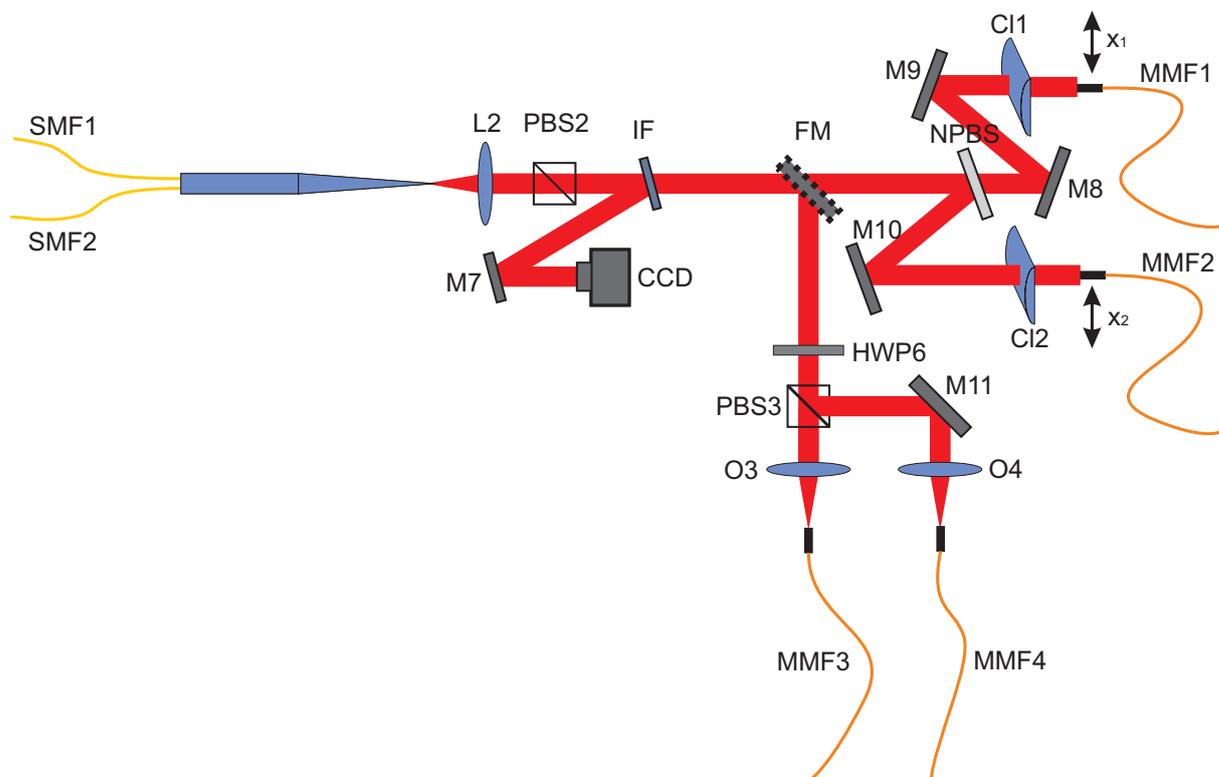


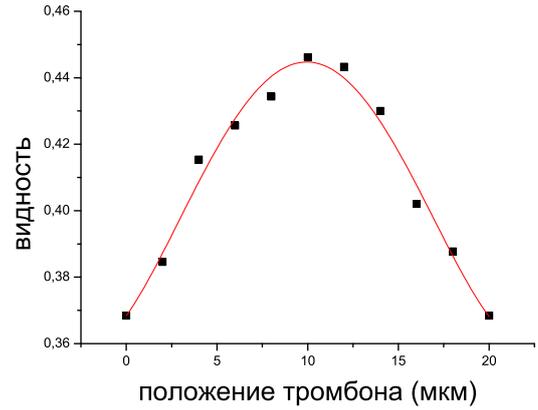
Рис. 4.7. Экспериментальная установка по наблюдению квантовой интерференции

После поляризационного светоделителя PBS2 был расположен интерференционный фильтр IF шириной 20 нм, установленный под определенным углом так, чтобы максимум пропускания находился на длине волны 814 нм. Для стабилизации разности фаз на выходе из одномодовых волокон SMF1 и SMF2 совместно с накачкой в установку заводилось излучение He-Ne лазера с длиной волны 632.8 нм, которое, отражаясь от фильтра IF, попадало в камеру CCD на (Рис.4.7). По перемещению интерференционной картины, полученной с камеры, в реальном времени отслеживалось изменение относительной фазы, которая затем корректировалась при помощи зеркала M4, установленного на пьезоподачу. Без данной процедуры получение адекватных результатов не представлялось возможным, так как измерения квантовой интерференционной зависимости проводились в течении нескольких часов.



(а)

Рис. 4.8. Интерференционная картина, полученная от фемтосекундного лазера



(б)

Рис. 4.9. Зависимость видности интерференции от положения призмы Тб

Для первоначального выравнивания оптических путей в обоих каналах preparatory scheme в установку заводилось излучение фемтосекундного лазера с длиной волны 814 нм и длительностью импульса 84 фс. Balancing optical channels with accuracy  $\sim 20$   $\mu\text{m}$  was necessary due to the sufficiently wide spectrum of parametric scattering ( $\sim 5$  nm). On figure 4.8 is shown an interference pattern from a femtosecond laser, recorded by a CCD camera. In dependence on the position of the trombone prism Тb the visibility of this pattern (Fig. 4.9), after which the prism was set in the position of maximum visibility.

A parallel beam, formed by lens L2, is split into two by means of a non-polarizing beam splitter NPBS (Fig. 4.7). Cylindrical lenses C1 and C2 with focal lengths of 70 mm and 80 mm respectively focus the radiation in the vertical plane to increase the collection of the useful signal, as in this direction there are no interference fringes. In the foci of lenses C1 and C2 the ends of multimode fibers, movable in the horizontal direction perpendicular to the incident radiation, are located. For the setup of the preparatory scheme and the check of the quality of the prepared

состояний (рис. 4.10 (а) и (б)) после линзы L2 находилось откидное зеркало FM, после которого была организована двухканальная схема. Поляризационный светоделитель PBS3, находящийся после полуволновой пластинки HWP6, повернутой на угол 22,5 градуса, обеспечивал одинаковые интенсивности в проходящем и отраженном от него каналах. Излучение после PBS3 заводилось в многомодовые волокна MMF3, MMF4 с помощью объективов O3 и O4. При помощи данных объективов на торцах многомодовых волокон MMF3, MMF4 строилось увеличенное изображение торцов одномодовых волокон SMF1 и SMF2 (находящихся на конце «иглы»). Перемещение торцов многомодовых волокон в горизонтальном направлении позволяло заводить излучение только от одного из источников схемы Юнга в перемещаемое волокно.

Для проверки качестваготавливаемых квантовых состояний исследовалось экспериментальное согласие с формулой 4.23, где  $\alpha$  – угол поворота пластинки HWP3. Зависимость скорости счета совпадений однофотонных детекторов от угла поворота пластинки HWP3 приведена на рисунках 4.10 (а) и (б). График 4.10 (а) был получен путем измерения скорости счета совпадений между двумя поляризационными каналами (после настройки волокон MMF3 и MMF4 на торцы волокон SMF1 и SMF2 соответственно). Для получения зависимости (Рис. 4.10 (б)) оба счетных детектора настраивались на один поляризационный канал подготовительной схемы: в волокна MMF3 и MMF4 заводилось излучение из торца волокна SMF2. В случае настройки на торец волокна SMF1 имеет место полностью аналогичная зависимость.

Хорошая видность этих распределений ( $97.5 \pm 2\%$ ) позволяет говорить о наличии чистого состояния  $|1, 1\rangle$  при  $\alpha = 0 + n\pi/4$  и NOON состояния  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 0\rangle + |0, 2\rangle)$  – при  $\alpha = \pi/8 + n\pi/4$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Систематическая ошибка установки шкалы полуволновой пластинки HWP3 отличается от введенного угла  $\alpha$  на  $-3^\circ$ .

После настройки генерирующей схемы и схемы детектирования измерялись зависимости скорости счета совпадений в зависимости от положения торцов торцов одномодовых волокон MMF1, MMF2 для NOON и  $|1, 1\rangle$  квантовых

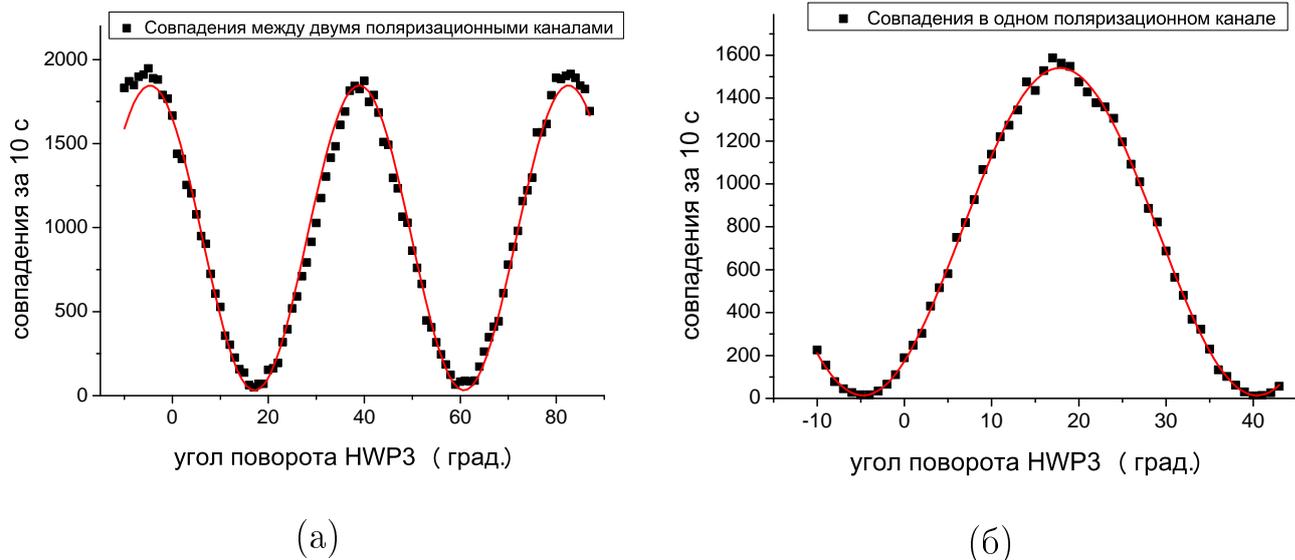


Рис. 4.10. Зависимость скорости счета совпадений для двух (а) и одного (б) поляризационных каналов от угла поворота пластинки HWP3

состояний. Данные волокна перемещались в поперечном направлении при помощи моторизированных подач. Время накопления сигнала составляло 300 с на одну точку, также каждая точка представляет собой результат усреднения 3-х значений для уменьшения дисперсии. Полученные экспериментальные распределения для соответствующих состояний приведены на графиках 4.11 и 4.12.

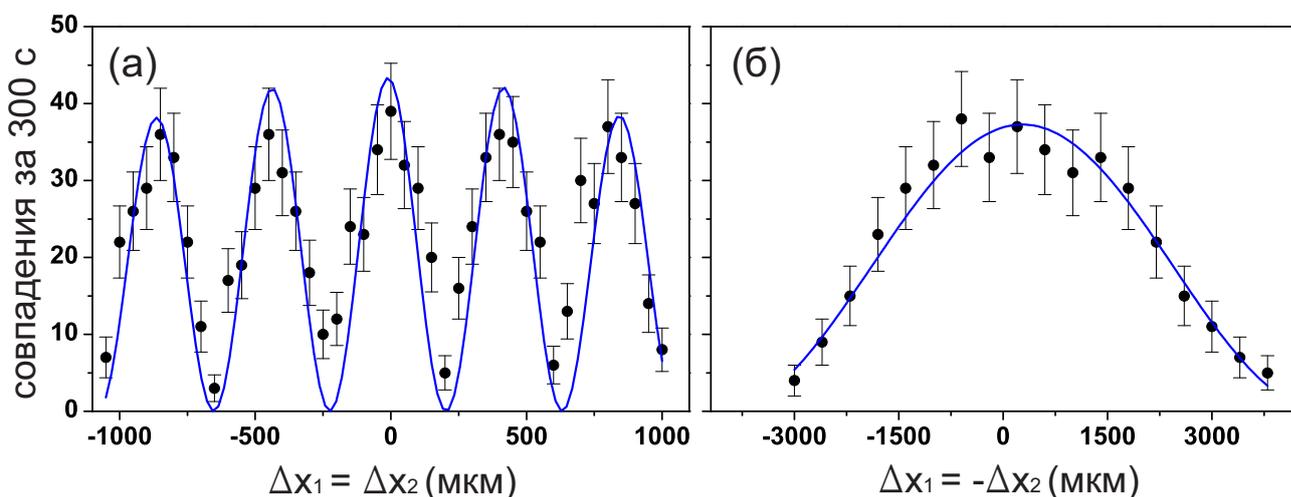


Рис. 4.11. Скорость счета совпадений при смещении  $\Delta x_1 = \Delta x_2$  (а) и смещении  $\Delta x_1 = -\Delta x_2$  (б) для NOON состояния.

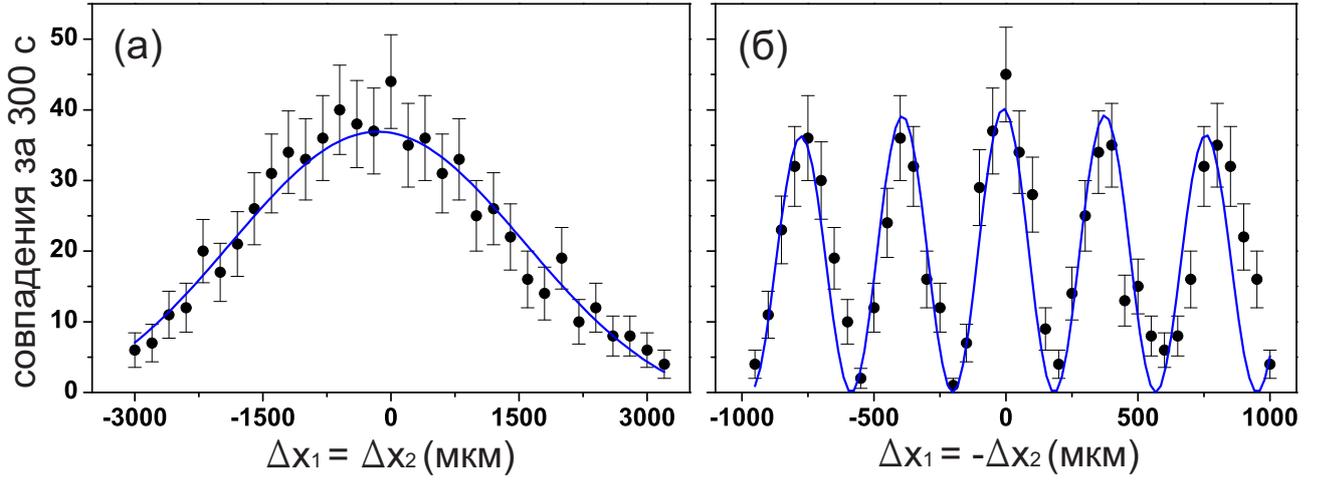


Рис. 4.12. Скорость счета совпадений при смещении  $\Delta x_1 = \Delta x_2$  (а) и смещении  $\Delta x_1 = -\Delta x_2$  (б) для генерируемого состояния  $|1, 1\rangle$ .

#### 4.4. Обсуждение результатов

Период полученных распределений близок к расчетному:  $\Lambda = 678.3$  мкм в теории, в эксперименте для  $|1, 1\rangle$  период получился равным  $736 \pm 14$  мкм, и  $800 \pm 28$  мкм - для NOON состояния. Экспериментальное увеличение периода может возникнуть из-за не точного помещения источников интерферометра Юнга в фокус линзы L2, в этом случае может строиться как увеличенное, так и уменьшенное изображение в плоскости перемещения волокон MMF1 и MMF2. Отличие же периодов для разных квантовых состояний скорее всего связано с «дрожанием» фазы в пределах  $\sim 5\%$  в пересчете на период квантовой интерференции. Эти «дрожания» имели частоту  $\sim 2 - 3$  Гц и отчетливо наблюдались на классической интерференционной зависимости при освещении фемтосекундным лазером. Наличие небольшой модуляции разности фаз в схеме Юнга особенно сказывается при исследовании NOON состояния.

Для суперпозиции состояний  $|1, 1\rangle$  и NOON теория предсказывает наличие интерференционных полос при сканировании как вдоль  $\Delta x_1 = \Delta x_2$ , так и  $\Delta x_1 = -\Delta x_2$ , но в силу сложности контроля фазы и слабого сигнала данное состояние не было исследовано.

Состояние  $|1, 1\rangle$  (Рис. 4.12) измерялось без коррекции медленного ухода

разности фаз в источнике Юнга, в то время как для измерений с NOON состоянием (Рис. 4.11) этот уход фазы постоянно контролировался.

Видность полученных интерференционных зависимостей составила  $72 \pm 5.5\%$  для NOON состояния (Рис. 4.11 (а)) и  $84 \pm 3\%$  для состояния  $|1, 1\rangle$  (Рис. 4.12 (б)). Причина невысокой видности интерференционной картины совпадений, скорее всего, связана с достаточно широким собираемым спектром параметрического рассеяния ( $\sim 5$  нм).

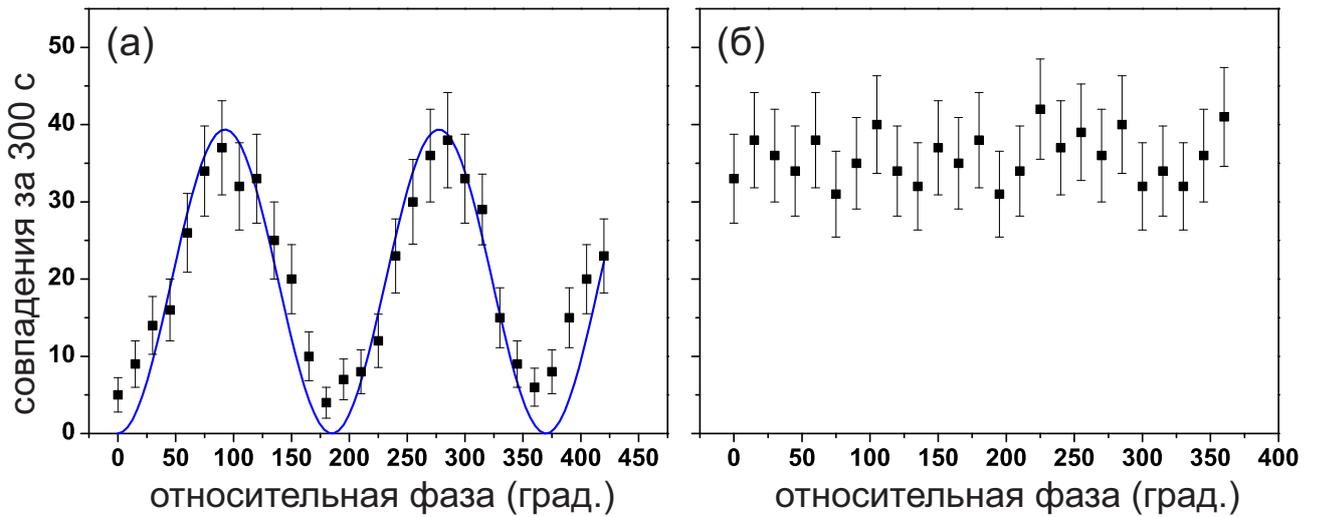


Рис. 4.13. Зависимость скорости счета совпадений от вносимой разности фаз в приготавливаемое состояние для NOON (а) и  $|1, 1\rangle$  (б) состояний.

Для проверки зависимости интерференционных распределений от разности фаз между двумя источниками в схеме Юнга для двух исследуемых квантовых состояний подвижные детекторы устанавливались в центральное положение ( $x_1 = x_2 = 0$ ), а относительная фаза изменялась при помощи перемещения зеркала М4. Вносимая разность фазы в подготовительной схеме была предварительно откалибрована по излучению фемтосекундного лазера в зависимости от напряжения на пьезоподвижке. Зависимости скорости счета совпадений от вносимой разности фаз приведены на Рис.4.13(а) и Рис.4.13(б) для NOON и  $|1, 1\rangle$  состояний соответственно. Характер полученных зависимостей хорошо согласуется с теоретическими распределениями 4.18 и 4.23 в зависимости от вносимой разности фаз  $\theta$ .

В заключение данной главы необходимо отметить, что описанная выше схема является последним вариантом установки, сконструированным эмпирически по итогам серии экспериментов. Были испробованы генерирующие кристаллы длиной 1 мм, 2 мм, 5 мм, и самым эффективным оказался 2 мм. В кристалле 5 мм из-за эффекта сноса эффективность сбора полезного сигнала не превышает эффективность генерации за счет увеличения длины кристалла. Также была попытка использования кристалла типа I, чтобы затем поставить два таких кристалла со скрещенными осями и поляризовать накачку под 45 градусов к этим осям. Но оказалось, что эффективность генерации от ВВО типа I в заданный узкий спектральный диапазон не выше, чем от кристалла типа II.

Были испробованы различные линзы, фокусирующие накачку в кристалл, и различные собирающие объективы O1 и O2, в соответствии с рекомендациями, приведенными в работе [92]. В итоге оптическая длина путей подготовительной схемы составляла  $\sim 64$  см, размер перетяжки накачки внутри кристалла – 90 мкм (по уровню  $1/e$ ), в то время как сбор в одномодовые волокна происходил с области 120 мкм на кристалле (по расчетам). Полный угол сбора излучения с кристалла был  $0.2^\circ$ , что соответствовало спектру шириной 5 нм для кристалла ВВО типа II длиной 2 мм. Также была попытка использования в качестве накачки генерирующей схемы второй гармоники от фемтосекундного лазера мощностью 127 мВт, против 56 мВт для диодного лазера, но в силу более широкого спектра второй гармоники ( $\sim 3$  нм) эффективность такой схемы оказалась сходной с непрерывной накачкой ( $\Delta\lambda \sim 1.5$  нм), в то время как количество случайных совпадений увеличилось.

## 4.5. Выводы к четвертой главе

В данной главе диссертационной работы изучались пространственные корреляции, возникающие при интерференции бифотонных полей в схеме Юнга.

Была рассчитана и сконструирована экспериментальная установка для ге-

нерации квантовых поляризационных состояний одномодовых бифотонов.

Было исследовано качество приготовления состояний в генерирующей схеме.

Были получены распределения двухфотонных квантовых корреляций в схеме Юнга для различныхготавливаемых состояний.

Была исследована зависимость квантовых интерференционных полос для различных входных состояний от фазы, вносимой в один из источников схемы Юнга.

Был проведен анализ результатов, подтвердивший соответствие экспериментальных данных теоретическим распределениям.

Результаты четвертой главы опубликованы в работе [42].

## Заключение

- Экспериментально исследован пространственный спектр бифотонного поля, генерируемого в процессе СПР. Было экспериментально подтверждено, что исследуемый угловой спектр хорошо согласуется с моделью разложения по модам Шмидта, с базисными модами разложения в виде мод Эрмита-Гаусса.
- При помощи процедуры самокалибрующейся томографии были получены параметры «неидеальности» детектирования экспериментальной установки и восстановлены собственные значения разложения Шмидта, с учетом этих параметров.
- Исследовано разложение по когерентным модам для классических квазитепловых источников. Было экспериментально подтверждено, что данное разложение полностью аналогично разложению Шмидта для квантового случая.
- Предложен оригинальный метод калибровки детектора пространственных мод. Ключевой особенностью метода является то, что отклик детектора на какую-либо входную пространственную моду высокого порядка может быть измерен без непосредственного приготовления этой входной моды.
- Исследована структура пространственных корреляций, возникающая при подаче бифотонного состояния на вход интерферометра Юнга. Экспериментально продемонстрировано, что квантовое интерференционное распределение от входного состояния  $|1, 1\rangle$  обладает меньшим периодом, по сравнению с классическим и является не чувствительным к разности фаз между источниками схемы Юнга, что может быть использовано в системах квантовой литографии.

## Список сокращений и условных обозначений

СПР – спонтанное параметрическое рассеяние

ЭГ (мода) – поперечная пространственная мода Эрмита-Гаусса

ЛГ (мода) – поперечная пространственная мода Лагерра-Гаусса

POVM – positive-operator valued measure, положительная операторно-значная мера

SLM – пространственный модулятор света

PBS – поляризационный светоделитель

SMF – пространственно одномодовый световод

MMF – пространственно многомодовый световод

## Список литературы

1. *Brougham T., Barnett S. M.* Information communicated by entangled photon pairs // *Phys. Rev. A*. 2012. Vol. 85, no. 3.
2. *Langford N. K., Dalton R. B., Harvey M. D. et al.* Measuring Entangled Qutrits and Their Use for Quantum Bit Commitment // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 93, no. 5.
3. *Sharapova P., Pérez A. M., Tikhonova O. V., Chekhova M. V.* Schmidt modes in the angular spectrum of bright squeezed vacuum // *Physical Review A*. 2015. Vol. 91, no. 4.
4. *Klyshko D. N., Penin A. N., Polkovnikov B. F.* Parametric Luminescence and Light Scattering by Polariton // *Sov. Phys. JETP Lett.* 1970. Vol. 11, no. 05.
5. *O'Sullivan-Hale M. N., Khan I. A., Boyd R. W., Howell J. C.* Pixel Entanglement: Experimental Realization of Optically Entangled  $d=3$  and  $d=6$  Qudits // *Physical Review Letters*. 2005. Vol. 94, no. 22.
6. *Kwon O., Cho Y.-W., Kim Y.-H.* Single-mode coupling efficiencies of type-II spontaneous parametric down-conversion: Collinear, noncollinear, and beamlike phase matching // *Physical Review A*. 2008. Vol. 78, no. 5.
7. *Law C. K., Eberly J. H.* Analysis and Interpretation of High Transverse Entanglement in Optical Parametric Down Conversion // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 92, no. 12.
8. *Bandres M. A., Gutiérrez-Vega J. C.* Ince-Gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators // *Journal of the Optical Society of America A*. 2004. Vol. 21, no. 5. P. 873.
9. *Bentley J. B., Davis J. A., Bandres M. A., Gutiérrez-Vega J. C.* Generation of helical Ince-Gaussian beams with a liquid-crystal display // *Optics Letters*. 2006. Vol. 31, no. 5. P. 649.
10. *Hiesmayr B. C., de Dood M. J. A., Löffler W.* Observation of Four-Photon Orbital Angular Momentum Entanglement // *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 116,

no. 7.

11. Ibrahim A. H., Roux F. S., McLaren M. et al. Orbital-angular-momentum entanglement in turbulence // *Physical Review A*. 2013. Vol. 88, no. 1.
12. Klyshko D. N. Use of two-photon light for absolute calibration of photoelectric detectors // *Soviet Journal of Quantum Electronics*. 1980. Vol. 10, no. 9. P. 1112–1117.
13. Malygin A. A., Penin A. N., Sergienko A. V. Absolute Calibration of the Sensitivity of Photodetectors Using a Two-Photon Field // *Sov. Phys. JETP Lett.* 1981. Vol. 33. P. 477–480.
14. D'Ariano G. M., Maccone L., Presti P. L. Quantum Calibration of Measurement Instrumentation // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 93, no. 25.
15. Brida G., Genovese M., Gramegna M. Twin-photon techniques for photo-detector calibration // *Laser Physics Letters*. 2006. Vol. 3, no. 3. P. 115–123.
16. Polyakov S. V., Migdall A. L. High accuracy verification of a correlated-photon-based method for determining photoncounting detection efficiency // *Opt. Express*. 2007. Vol. 15, no. 4. P. 1390.
17. Mogilevtsev D., Rehacek J., Hradil Z. Relative tomography of an unknown quantum state // *Phys. Rev. A*. 2009. Vol. 79, no. 2.
18. Mogilevtsev D. Calibration of single-photon detectors using quantum statistics // *Phys. Rev. A*. 2010. Vol. 82, no. 2.
19. Bra'czyk A. M., Mahler D. H., Rozema L. A. et al. Self-calibrating quantum state tomography // *New Journal of Physics*. 2012. Vol. 14, no. 8. P. 085003.
20. Pittman T. B., Shih Y. H., Strekalov D. V., Sergienko A. V. Optical imaging by means of two-photon quantum entanglement // *Phys. Rev. A*. 1995. Vol. 52, no. 5. P. R3429–R3432.
21. Aspden R. S., Tasca D. S., Boyd R. W., Padgett M. J. EPR-based ghost imaging using a single-photon-sensitive camera // *New Journal of Physics*. 2013. Vol. 15, no. 7. P. 073032.
22. Abouraddy A. F., Saleh B. E. A., Sergienko A. V., Teich M. C. Role of En-

- tanglement in Two-Photon Imaging // *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 87, no. 12.
23. *Gatti A., Brambilla E., Lugiato L. A.* Entangled Imaging and Wave-Particle Duality: From the Microscopic to the Macroscopic Realm // *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 90, no. 13.
  24. *Bennink R. S., Bentley S. J., Boyd R. W.* “Two-Photon” Coincidence Imaging with a Classical Source // *Physical Review Letters*. 2002. Vol. 89, no. 11.
  25. *Bennink R. S., Bentley S. J., Boyd R. W., Howell J. C.* Quantum and Classical Coincidence Imaging // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 92, no. 3.
  26. *Starikov A., Wolf E.* Coherent-mode representation of Gaussian Schell-model sources and of their radiation fields // *Journal of the Optical Society of America*. 1982. Vol. 72, no. 7. P. 923.
  27. *Bolduc E., Bent N., Santamato E. et al.* Exact solution to simultaneous intensity and phase encryption with a single phase-only hologram // *Optics Letters*. 2013. Vol. 38, no. 18. P. 3546.
  28. *Heckenberg N. R., McDuff R., Smith C. P. et al.* Laser beams with phase singularities // *Optical and Quantum Electronics*. 1992. Vol. 24, no. 9. P. S951–S962.
  29. *Brandt L., Muldoon C., Thiele T. et al.* Spatial light modulators for the manipulation of individual atoms // *Applied Physics B*. 2010. Vol. 102, no. 3. P. 443–450.
  30. *Lundeen J. S., Feito A., Coldenstrodt-Ronge H. et al.* Tomography of quantum detectors // *Nat Phys*. 2008. Vol. 5, no. 1. P. 27–30.
  31. *Humphreys P. C., Metcalf B. J., Gerrits T. et al.* Tomography of photon-number resolving continuous-output detectors // *New Journal of Physics*. 2015. Vol. 17, no. 10. P. 103044.
  32. *Feito A., Lundeen J. S., Coldenstrodt-Ronge H. et al.* Measuring measurement: theory and practice // *New Journal of Physics*. 2009. Vol. 11, no. 9. P. 093038.
  33. *Boto A. N., Kok P., Abrams D. S. et al.* Quantum Interferometric Optical Lithography: Exploiting Entanglement to Beat the Diffraction Limit // *Phys*.

- Rev. Lett.* 2000. Vol. 85, no. 13. P. 2733–2736.
34. *Hong C. K., Ou Z. Y., Mandel L.* Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference // *Physical Review Letters*. 1987. Vol. 59, no. 18. P. 2044–2046.
  35. *D'Angelo M., Chekhova M. V., Shih Y.* Two-Photon Diffraction and Quantum Lithography // *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 87, no. 1.
  36. *Shin H., Chan K. W. C., Chang H. J., Boyd R. W.* Quantum Spatial Superresolution by Optical Centroid Measurements // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 107, no. 8.
  37. *Schwartz O., Oron D.* Improved resolution in fluorescence microscopy using quantum correlations // *Physical Review A*. 2012. Vol. 85, no. 3.
  38. *Giovannetti V., Lloyd S., Maccone L., Shapiro J. H.* Sub-Rayleigh-diffraction-bound quantum imaging // *Physical Review A*. 2009. Vol. 79, no. 1.
  39. *Straupe S. S., Ivanov D. P., Kalinkin A. A. et al.* Angular Schmidt modes in spontaneous parametric down-conversion // *Phys. Rev. A*. 2011. Vol. 83, no. 6.
  40. *Straupe S. S., Ivanov D. P., Kalinkin A. A. et al.* Self-calibrating tomography for angular Schmidt modes in spontaneous parametric down-conversion // *Phys. Rev. A*. 2013. Vol. 87, no. 4.
  41. *Bobrov I. B., Straupe S. S., Kovlakov E. V., Kulik S. P.* Schmidt-like coherent mode decomposition and spatial intensity correlations of thermal light // *New Journal of Physics*. 2013. Vol. 15, no. 7. P. 073016.
  42. *Bobrov I. B., Kalashnikov D. A., Krivitsky L. A.* Imaging of spatial correlations of two-photon states // *Phys. Rev. A*. 2014. Vol. 89, no. 4.
  43. *Bobrov I. B., Kovlakov E. V., Markov A. A. et al.* Tomography of spatial mode detectors // *Opt. Express*. 2015. Vol. 23, no. 2. P. 649.
  44. *Klyshko D. N.* Photon and Nonlinear Optics // *Gordon and Breach Science, New York*. 1988.
  45. *Burlakov A. V., Chekhova M. V., Klyshko D. N. et al.* Interference effects in spontaneous two-photon parametric scattering from two macroscopic regions //

- Physical Review A*. 1997. Vol. 56, no. 4. P. 3214–3225.
46. Monken C. H., Ribeiro P. H. S., Pádua S. Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion // *Physical Review A*. 1998. Vol. 57, no. 4. P. 3123–3126.
  47. Walborn S. P., de Oliveira A. N., Pádua S., Monken C. H. Multimode Hong-Ou-Mandel Interference // *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 90, no. 14.
  48. Fedorov M. V., Efremov M. A., Volkov P. A. et al. Anisotropically and High Entanglement of Biphoton States Generated in Spontaneous Parametric Down-Conversion // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 99, no. 6.
  49. Miatto F. M., Yao A. M., Barnett S. M. Full characterization of the quantum spiral bandwidth of entangled biphotons // *Phys. Rev. A*. 2011. Vol. 83, no. 3.
  50. Salakhutdinov V. D., Eliel E. R., Löffler W. Full-Field Quantum Correlations of Spatially Entangled Photons // *Phys. Rev. Lett.* 2012. Vol. 108, no. 17.
  51. Fedorov M. V., Mikhailova Y. M., Volkov P. A. Gaussian modelling and Schmidt modes of SPDC biphoton states // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. 2009. Vol. 42, no. 17. P. 175503.
  52. Thylwe K. E. On relativistic shifts of negative-ion resonances // *The European Physical Journal D*. 2012. Vol. 66, no. 1.
  53. Fedorov M. V. Schmidt decomposition for non-collinear biphoton angular wave functions // *Phys. Scr.* 2015. Vol. 90, no. 7. P. 074048.
  54. Walborn S. P., Pimentel A. H. Generalized Hermite–Gauss decomposition of the two-photon state produced by spontaneous parametric down conversion // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. 2012. Vol. 45, no. 16. P. 165502.
  55. Mogilevtsev D., Řeháček J., Hradil Z. Self-calibration for self-consistent tomography // *New Journal of Physics*. 2012. Vol. 14, no. 9. P. 095001.
  56. Nielsen M. A., Chuang I. L. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, 2000. ISBN: 1107002176.
  57. Heilprin L. B. Information Theory and Statistics. Solomon Kullback. Wiley,

- New York; Chapman and Hall, London; 1959. xvii, 395 pp. Illus. \$12.50 // *Science*. 1960. Vol. 131, no. 3404. P. 917–918.
58. Hradil Z. Quantum-state estimation // *Phys. Rev. A*. 1997. Vol. 55, no. 3. P. R1561–R1564.
59. Fiurášek J., Hradil Z. Maximum-likelihood estimation of quantum processes // *Phys. Rev. A*. 2001. Vol. 63, no. 2.
60. Řeháček J., Hradil Z. Invariant Information and Quantum State Estimation // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 88, no. 13.
61. Ježek M., Fiurášek J., Hradil Z. Quantum inference of states and processes // *Phys. Rev. A*. 2003. Vol. 68, no. 1.
62. Rossi A. R., Olivares S., Paris M. G. A. Photon statistics without counting photons // *Phys. Rev. A*. 2004. Vol. 70, no. 5.
63. Rossi A. R., Paris M. G. A two-step MaxLik-MaxEnt strategy to infer photon distribution from on/off measurement at low quantum efficiency // *The European Physical Journal D*. 2004. Vol. 32, no. 2. P. 223–226.
64. Miatto F. M., Brougham T., Yao A. M. Cartesian and polar Schmidt bases for down-converted photons // *The European Physical Journal D*. 2012. Vol. 66, no. 7.
65. Miatto F. M., Pires H. D. L., Barnett S. M., van Exter M. P. Spatial Schmidt modes generated in parametric down-conversion // *The European Physical Journal D*. 2012. Vol. 66, no. 10.
66. Mandel L., Wolf E. Optical Coherence and Quantum Optics. Cambridge University Press, 1995.
67. Erkmen B. I., Shapiro J. H. Unified theory of ghost imaging with Gaussian-state light // *Phys. Rev. A*. 2008. Vol. 77, no. 4.
68. Bache M., Magatti D., Ferri F. et al. Coherent imaging of a pure phase object with classical incoherent light // *Physical Review A*. 2006. Vol. 73, no. 5.
69. Ferri F., Magatti D., Gatti A. et al. High-Resolution Ghost Image and Ghost Diffraction Experiments with Thermal Light // *Physical Review Letters*. 2005.

Vol. 94, no. 18.

70. Gatti A., Brambilla E., Bache M., Lugiato L. A. Ghost Imaging with Thermal Light: Comparing Entanglement and Classical Correlation // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 93, no. 9.
71. Brambilla E., Gatti A., Bache M., Lugiato L. A. Simultaneous near-field and far-field spatial quantum correlations in the high-gain regime of parametric down-conversion // *Physical Review A*. 2004. Vol. 69, no. 2.
72. Martienssen W. Coherence and Fluctuations in Light Beams // *American Journal of Physics*. 1964. Vol. 32, no. 12. P. 919.
73. Arecchi F. T. Measurement of the Statistical Distribution of Gaussian and Laser Sources // *Physical Review Letters*. 1965. Vol. 15, no. 24. P. 912–916.
74. Syouji A., Kurihara K., Otomo A., Saito S. Diffraction-grating-type phase converters for conversion of Hermite-Laguerre-Gaussian mode into Gaussian mode // *Appl. Opt.* 2010. Vol. 49, no. 9. P. 1513.
75. Wang J., Yang J.-Y., Fazal I. M. et al. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing // *Nature Photonics*. 2012. Vol. 6, no. 7. P. 488–496.
76. Bozinovic N., Yue Y., Ren Y. et al. Terabit-Scale Orbital Angular Momentum Mode Division Multiplexing in Fibers // *Science*. 2013. Vol. 340, no. 6140. P. 1545–1548.
77. Molina-Terriza G., Torres J. P., Torner L. Twisted photons // *Nat Phys*. 2007. Vol. 3, no. 5. P. 305–310.
78. Qassim H., Miatto F. M., Torres J. P. et al. Limitations to the determination of a Laguerre–Gauss spectrum via projective, phase-flattening measurement // *Journal of the Optical Society of America B*. 2014. Vol. 31, no. 6. P. A20.
79. Kirk J. P., Jones A. L. Phase-Only Complex-Valued Spatial Filter // *Journal of the Optical Society of America*. 1971. Vol. 61, no. 8. P. 1023.
80. Davis J. A., Cottrell D. M., Campos J. et al. Encoding amplitude information onto phase-only filters // *Appl. Opt.* 1999. Vol. 38, no. 23. P. 5004.

81. *Boyd R. W., Dowling J. P.* Quantum lithography: status of the field // *Quantum Inf Process*. 2011. Vol. 11, no. 4. P. 891–901.
82. *Giovannetti V.* Quantum-Enhanced Measurements: Beating the Standard Quantum Limit // *Science*. 2004. — nov. Vol. 306, no. 5700. P. 1330–1336.
83. *Schnabel R., Mavalvala N., McClelland D. E., Lam P. K.* Quantum metrology for gravitational wave astronomy // *Nature Communications*. 2010. Vol. 1, no. 8. P. 121.
84. *Bentley S. J., Boyd R. W.* Nonlinear optical lithography with ultra-high sub-Rayleigh resolution // *Opt. Express*. 2004. Vol. 12, no. 23. P. 5735.
85. *Boyd R. W., Bentley S. J.* Recent progress in quantum and nonlinear optical lithography // *Journal of Modern Optics*. 2006. Vol. 53, no. 5-6. P. 713–718.
86. *Peeters W. H., Renema J. J., van Exter M. P.* Engineering of two-photon spatial quantum correlations behind a double slit // *Phys. Rev. A*. 2009. Vol. 79, no. 4.
87. *D'Angelo M., Chekhova M. V., Shih Y.* Two-Photon Diffraction and Quantum Lithography // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Vol. 87, no. 1.
88. *Steuernagel O.* On the concentration behaviour of entangled photons // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. 2004. Vol. 6, no. 6. P. S606–S609.
89. *Jacobson J., Björk G., Chuang I., Yamamoto Y.* Photonic de Broglie Waves // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 74, no. 24. P. 4835–4838.
90. *Ghosh R., Hong C. K., Ou Z. Y., Mandel L.* Interference of two photons in parametric down conversion // *Phys. Rev. A*. 1986. Vol. 34, no. 5. P. 3962–3968.
91. *Kim Y.-H., Shih Y.* // *Foundations of Physics*. 1999. Vol. 29, no. 12. P. 1849–1861.
92. *Kurtsiefer C., Oberparleiter M., Weinfurter H.* High-efficiency entangled photon pair collection in type-II parametric fluorescence // *Phys. Rev. A*. 2001. Vol. 64, no. 2.