

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

СТРАУПЕ СТАНИСЛАВ СЕРГЕЕВИЧ
КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА КВАНТОВЫХ
СОСТОЯНИЙ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ НА ОСНОВЕ
БИФОТОННЫХ ПОЛЕЙ

Специальность 01.04.21 — лазерная физика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор Кулик С. П.

МОСКВА - 2011

Оглавление

Введение	4
Глава 1 Кукварты на основе двухфотонных поляризационных состояний	13
§ 1.1 Методы приготовления оптических кудитов	14
п.1.1.1 Интерферометрические схемы (time-bin)	14
п.1.1.2 Схемы использующие орбитальный угловой момент фотонов	18
п.1.1.3 Схемы использующие корреляции в угловом спектре СПР	21
п.1.1.4 Методы, основанные на использовании поляризационных состояний бифотонов	22
§ 1.2 Бифотоны как поляризационные кукварты. Роль перестановочной симметрии и законов сохранения	29
п.1.2.1 Эквивалентность поляризационных состояний бифотонов и состояний пары перепутанных кубитов	30
п.1.2.2 Квантовая телепортация в системе тождественных фотонов	37
§ 1.3 Заключение к главе 1	45
Глава 2 Приготовление произвольных состояний поляризационных куквартов	46
§ 2.1 Схемы приготовления произвольных состояний поляризационных куквартов	46

§ 2.2	Реализация схемы приготовления произвольного состояния кукварта	51
§ 2.3	Приготовление и томография смешанных состояний куквартов	62
§ 2.4	Заключение	76
Глава 3 Пространственные моды Шмидта в угловом спектре бифотонного поля		79
§ 3.1	Угловой спектр СПР и пространственные корреляции фотонов	80
§ 3.2	Анализ перепутывания в угловом спектре с помощью разложения Шмидта	82
§ 3.3	Структура пространственных мод Шмидта	85
п.3.3.1	Моды Гаусса-Лагерра и перепутывание по угловому моменту фотонов	85
п.3.3.2	Моды Гаусса-Эрмита как приближенные моды Шмидта бифотонного поля	87
§ 3.4	Экспериментальные методы преобразования пространственных мод	89
§ 3.5	Реализация проекционных измерений в базисе мод Шмидта ..	94
§ 3.6	Заключение к главе 3	113
Заключение		115
Литература		117

Введение

Диссертационная работа посвящена экспериментальному изучению многоуровневых квантовых систем, реализованных на основе различных степеней свободы бифотонного поля. Рассматриваются вопросы связанные с приготовлением и измерением квантовых состояний в контексте возможности их использования в различных протоколах квантовой информации.

Наука о квантовой информации, без сомнения, может быть названа одной из наиболее бурно развивающихся в настоящее время областей физики. С фундаментальной точки зрения это наука о свойствах квантовых систем, рассматриваемых как информационный ресурс. Со стороны приложений основная практическая ценность этой деятельности заключается в разработке различных квантово-информационных протоколов, позволяющих решать задачи неразрешимые с точки зрения классической теории передачи данных. Одним из наиболее известных результатов, доведенным в настоящее время уже до коммерческих реализаций, являются протоколы квантового распределения ключа, позволяющие обеспечить безусловную секретность передаваемых сообщений, основывающуюся только на фундаментальных запретах, вытекающих из квантовой природы используемых носителей информации.

В некотором смысле, квантовая информация - это наука о *кубитах*, простейших двухуровневых квантовых системах, состояния которых опи-

сылаются векторами в двумерном Гильбертовом пространстве:

$$|\Psi\rangle = c_1 |0\rangle + c_2 |1\rangle.$$

Кубит является элементарной единицей квантовой информации в том же смысле, в каком «обычный» бит - единица информации классической. Основой для такого *определения* кубита является доказанная Шумахером квантовая теорема кодирования [1], согласно которой, имея в своем распоряжении достаточное количество кубитов, можно кодировать и передавать состояния квантовых систем аналогично тому, как классические сообщения кодируются в последовательности битов (двоичном коде). При этом оказывается, что решить эту задачу с помощью сколь угодно большого числа классических битов невозможно, т.е. квантовая информация в этом смысле - объект совсем иной природы, чем информация классическая.

Одной из причин такого различия является существование в квантовых системах корреляций, не имеющих классического аналога. Действительно, если мы возьмем произвольное состояние некоторой d -уровневой системы или, как принято говорить, *кюдита*¹

$$|\Psi\rangle = c_1 |0\rangle + c_2 |1\rangle + \dots + c_d |d\rangle,$$

то в общем случае окажется невозможным представить его в виде произведения состояний подсистем меньшей размерности: $|\Psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_k\rangle$. В таком случае, говорят что система находится в *перепутанном* (entangled) состоянии, в котором состояние всей системы вполне определено, в то время как подсистемы находятся в смешанном состоянии. Представить себе такую ситуацию в классической системе невозможно, что проявляется в принципиальных отличиях свойств квантовых корреляций от

¹от английского *quantum dit*.

классических. На основе этих отличий были сформулированы количественные критерии, позволяющие выяснить, описываются ли наблюдаемые в системе корреляции квантово-механически, или для их описания достаточно классического рассмотрения - неравенства Белла и им подобные [2, 3, 4].

Неклассические свойства корреляций проявляются уже в простейшем случае *кукварта* - системы двух перепутанных кубитов. Еще более интересной оказывается ситуация в системах большей размерности, где нарушения неравенств Белла становится все более существенным с увеличением размерности [5, 6, 7]. С практической точки зрения интерес к кудитам вызван новыми возможностями, которые открывает их использование в протоколах квантовой информации. В частности, исследования показывают, что протоколы квантового распределения ключа, использующие многоуровневые системы в качестве носителей информации, обладают большей устойчивостью к шумам в канале связи [8, 9, 10, 11].

Кудиты могут быть реализованы как состояния систем самой различной физической природы. Одной из самых удобных реализаций представляется квантово-оптическая, основанная на использовании различных степеней свободы фотонов. Предельно возможная скорость распространения, слабое взаимодействие с окружением, приводящее к практически полному отсутствию декогеренции, делает фотоны идеальными носителями квантовой информации. Одним из основных источников коррелированных фотонов, используемым в квантово-информационных экспериментах является процесс спонтанного параметрического рассеяния света [12]. Пары фотонов, рождающиеся в таком процессе коррелированы по направлению распространения, частоте и поляризации, принято называть *бифотон*. Существует несколько путей для экспериментальной реализации оптических кудитов на основе бифотонов. Во-первых, можно использовать поляризации

онные степени свободы фотонов пары. Такой способ подходит для систем небольшой размерности (как правило, кутритов и куквартов). Второй способ состоит в использовании других степеней свободы фотона, например частоты, или направления распространения. Здесь мы сталкиваемся с ситуацией формально бесконечной размерности пространства состояний, потенциально обладающего огромными информационными ресурсами. Возникает естественный вопрос о количественной характеристике этих ресурсов, который как оказывается, тесно связан с вопросом о количественных мерах перепутывания в таких системах. Оказывается возможным «дискретизовать» пространство состояний введением счетного базиса из когерентных мод. При особом выборе этого базиса (базис из так называемых *мод Шмидта*), оказывается возможным в явном виде проследить межмодовые корреляции, характеризующие пространственное перепутывание в бифотонной паре. Разработке экспериментальных методов приготовления и измерения состояний кудитов на основе как поляризационных, так и пространственных степеней свободы бифотонов посвящена данная работа.

Актуальность работы обусловлена как фундаментальным интересом к проблемам, связанным с экспериментальным контролем над свойствами многоуровневых систем, так и возможным применением таких систем в квантовых информационных протоколах.

Были сформулированы следующие задачи диссертационной работы:

1. Исследование вопроса о перепутывании в системе двух тождественных фотонов и корректном описании основанных на их использовании квантово-информационных протоколов.
2. Разработка и реализация экспериментальных методов приготовления произвольных чистых состояний поляризационных куквартов на ос-

нове бифотонов, и изучение физических ограничений на чистоту приготавливаемых состояний.

3. Экспериментальное приготовление и квантовая томография смешанных состояний поляризационных куквартов. Получение смешанных состояний с различной степенью чистоты.
4. Разработка экспериментальных методов реализации проекционных измерений в дискретном базисе когерентных мод Шмидта. Экспериментальное исследование пространственного перепутывания в угловом спектре бифотонного поля на основе разложения по модам Шмидта. Определение параметров этого разложения с помощью прямых измерений.

Новизна диссертационной работы заключается в следующих положениях:

1. На примере протокола квантовой телепортации рассмотрен вопрос об адекватности описания поляризационных состояний пары тождественных фотонов как состояний различимых кубитов.
2. Разработан экспериментальный метод приготовления произвольных чистых состояний поляризационных куквартов использующий неколлинеарный, частотно-невырожденный режим спонтанного параметрического рассеяния. Исследовано влияние частотной дисперсии в нелинейном кристалле на чистоту приготавливаемых состояний. Показана необходимость компенсации дисперсионных эффектов даже при использовании непрерывной накачки и предложены методы осуществления такой компенсации.
3. Произведена экспериментальная томография смешанных состояний поляризационных куквартов на основе бифотонов, генерируемых в

процессе спонтанного параметрического рассеяния с импульсной накачкой. Показана возможность экспериментального восстановления смешанных поляризационных состояний с высокой точностью.

4. Разработаны методы реализации проекционных измерений в базисе мод Шмидта для углового спектра бифотонного поля. Экспериментально исследована двумерная структура разложения состояния бифотона по базису мод Шмидта. Изучен вопрос о возможности приближения мод Шмидта модами Гаусса-Эрмита.

Научная и практическая значимость диссертации состоит в возможном использовании полученных результатов в задачах квантовой оптики и квантовой информации:

- при реализации протоколов квантовой информации на многоуровневых системах;
- для экспериментального изучения перепутывания в пространственном спектре бифотонного поля.

Результаты работы прошли **апробацию** на следующих международных и российских конференциях:

IX международная молодежная научная школа «**Когерентная оптика и оптическая спектроскопия**», Казань, Россия, 2006 г., международная конференция «**Coherent Control of the Fundamental Processes in Optics and X-ray-Optics (CCFP'2006)**», Н.Новгород - Казань, Россия, 2006 г., международная конференция «**X Международные чтения по квантовой оптике**», Самара, Россия, 2007 г., международная конференция «**17th International Laser Physics Workshop (LPHYS'08)**»,

Трондхейм, Норвегия, 2008 г., конференция «**Поляризациянная оптика**», Москва, Россия, 2008 г., международная конференция «**18th International Laser Physics Workshop**», Барселона, Испания, 2009 г., международная конференция «**19th International Laser Physics Workshop**», Фоз до Игуасу, Бразилия, 2010 г., международная конференция «**ICONO/LAT 2010**», Казань, Россия, 2010 г.,

Диссертационная работа состоит из трех глав, введения и заключения

Первая глава в своей первой части содержит обзор существующих экспериментальных методов приготовления оптических многоуровневых систем с акцентом на работах, посвященных поляризаационным куквартам и кутритам. Во второй части главы подробно рассмотрен вопрос об описании поляризаационных состояний пар тождественных фотонов. Обсуждается вопрос об эквивалентности таких состояний паре различных кубитов. Подробно рассмотрен пример протокола квантовой телепортации в системе тождественных фотонов.

Вторая глава посвящена методам приготовления и измерения состояний поляризаационных куквартов. В первой части рассмотрено приготовление произвольных чистых состояний и эффекты частотной дисперсии, негативно сказывающиеся на качестве приготовления. Вторая часть посвящена томографии смешанных состояний поляризаационных куквартов.

Третья глава посвящена пространственным кудитам и корреляциям в угловом спектре бифотонного поля. Рассмотрены эксперименты по экспериментальному выделению мод Шмидта и изучению разложения углового спектра бифотонного поля по базису из этих мод.

В заключении сформулированы основные выводы и результаты диссертационной работы, представляющие собой **суть выносимых на защиту**

положений.

1. Для экспериментального приготовления произвольных чистых состояний поляризационных куквартов, можно использовать только два нелинейных кристалла.
2. Частотная дисперсия в кристалле влияет на чистоту приготавливаемых поляризационных состояний. Этот нежелательный эффект может быть устранен с помощью специально подобранного двулучепреломляющего компенсатора.
3. Экспериментально реализован протокол квантовой томографии смешанных состояний поляризационных куквартов. Продемонстрировано высокое качество приготовления и восстановления состояний.
4. Проекционные измерения в базисе пространственных мод Шмидта для углового спектра бифотонного поля могут быть реализованы с помощью одномодового оптического волокна и преобразующих фазовых голограмм.
5. Для мягкой фокусировки накачки пространственные моды Шмидта близки к модам Гаусса-Эрмита. Коэффициенты разложения Шмидта убывают экспоненциально.

Основные материалы диссертации опубликованы в следующих работах:

P1. *M. V. Fedorov, M. A. Efremov, P. A. Volkov, E. V. Moreva, S. S. Straupe and S. P. Kulik*, Anisotropic and High Entanglement of Biphoton States Generated in Spontaneous Parametric Down-Conversion // *Phys. Rev. Lett.*, 99, 063901, 2007.

P2. *M. V. Fedorov, M. A. Efremov, P. A. Volkov, E. V. Moreva, S. S. Straupe and S. P. Kulik*, Spontaneous parametric down-conversion: Anisotropical

and anomalously strong narrowing of biphoton momentum correlation distributions // Phys. Rev. A., 77, 032336, 2008.

P3. *S.-Y. Baek, S. S. Straupe, A. P. Shurupov, S. P. Kulik and Y.-H. Kim*, Preparation and characterization of arbitrary states of four-dimensional qudits based on biphotons // Phys. Rev. A, 78, 042321, 2008.

P4. *S. S. Straupe and S. P. Kulik*, On practical implementations of qudit-based quantum key distribution protocols // Quantum Cryptography and Computing, Vol. 26, Edited by R. H. e. al.. IOS Press, 2010. pp.83–98

P5. *Кулик С.П., Молотков С.Н., Страупе С.С.*, О телепортации в системе тождественных частиц // Письма в ЖЭТФ, Том 92 №3, 212–215, 2010.

P6. *С.С.Страупе, С.П.Кулик*, К вопросу о приготовлении перепутанных пар поляризационных кубитов в частотно-невырожденном режиме // ЖЭТФ, Том 137 №2, 211–219, 2010.

ГЛАВА 1

Кукварты на основе двухфотонных поляризационных состояний

Оптические многоуровневые квантовые системы (системы с размерностью гильбертова пространства состояний $D \geq 3$) вызывают все больший интерес, обусловленный во многом возможностью их применения в различных протоколах квантовой информации. Использование таких систем (называемых далее *оптическими кудитами*) в качестве носителей информации, имеет ряд преимуществ перед кодированием с помощью кубитов. Второй важной областью применения кудитов является экспериментальная проверка оснований квантовой теории, в частности, проверка неравенств Белла. При этом оказывается, что использование многоуровневых систем в ряде случаев позволяет увеличить количественный разрыв между квантовыми и классическими корреляциями, и соответственно снизить требования предъявляемые к детекторам и прочему экспериментальному оборудованию (*detection loophole*). В связи с этим, развитие методов приготовления и характеристики различных состояний кудитов (*quantum state engineering*) представляется актуальной задачей. В первой части данной главы дается обзор существующих методов приготовления оптических кудитов, основанных на использовании состояний бифотонного поля. Особое внимание уделяется методам, использующим поляризационные состояния

бифотонов, которые оказываются особенно удобными, поскольку позволяют легко экспериментально реализовывать измерения и широкий класс унитарных преобразований. Вторая часть главы посвящена подробному рассмотрению поляризационных степеней свободы двухфотонных состояний. Особое внимание уделено учету роли бозонной перестановочной симметрии при описании таких объектов.

§ 1.1. Методы приготовления оптических кудитов

В последнее время было предложено несколько различных способов реализации оптических кудитов. Можно выделить два основных подхода к созданию многоуровневых оптических систем. Во-первых кудит, очевидно, можно реализовать как перепутанное состояние нескольких кубитов, например нескольких фотонов, перепутанных по поляризации. Во-вторых можно использовать степени свободы одного фотона, такие как орбитальный угловой момент, пространственные и частотные степени свободы. В контексте нашей работы, наибольший интерес представляют исследования, в которых использовались поляризационные и пространственные степени свободы фотонов. Не претендуя на полноту изложения, приведем краткий обзор предложенных методов.

п.1.1.1. Интерферометрические схемы (time-bin)

Первой экспериментальной реализацией кудитов с использованием интерферометрических схем (перепутывание по переменным энергия-время) была работа [13]. Схема использовавшейся экспериментальной установки приведена на рис. 1.1.

Все элементы установки были реализованы в оптических волокнах. Па-

ры фотонов рождались в процессе СПР в периодически поляризованном кристалле ниобата лития, накачиваемом непрерывным излучением диодного лазера на длине волны 657 нм. Фотоны разделялись на 50% волоконном светоделителе, каждый из выходов которого направлялся на вход трехплечевого интерферометра, состоящего из так называемого, триттера - симметричного трехмодового (с тремя входами и тремя выходами) светоделителя, с коэффициентами пропускания 0.33/0.33/0.33 и трех участков волокон различной длины - плеч интерферометра, оканчивающихся фарадеевскими зеркалами. Обозначим интерферометры в двух каналах как A и B . Интерферометры были разбалансированы, но длины соответствующих плеч в каналах A и B были одинаковыми и подобраны таким образом, что выполнялись соотношения: $l_A - m_A \approx m_A - s_A \approx l_B - m_B \approx m_B - s_B \approx c\Delta\tau$, где $l(m, s)_A(B)$ - длины "длинного" "среднего" и "короткого" плеча в каналах A и B , соответственно. При выполнении этих условий, гистограмма времени прибытия одного фотона относительно времени прибытия первого имеет характерную структуру с пятью максимумами. Центральный максимум соответствует ситуации, в которой оба фотона прошли через плечи равной длины, остальные - временной задержке в $\pm\Delta\tau$ и $\pm 2\Delta\tau$, соответственно. Используемая разность длин плеч была подобрана таким образом, чтобы длина когерентности сигнала СПР была много меньше, а длина когерентности накачки, наоборот, много больше разности длин плеч. Первое условие обеспечивало отсутствие однофотонной интерференции, а второе - неразличимость возможных путей. Фарадеевские зеркала использовались для того, чтобы обеспечить ортогональность поляризационного состояния фотона на выходе интерферометра состоянию на входе, независимо от того по какому из плеч он прошел. Детектирование производилось с помощью трех счетных фотодетекторов в каждом из каналов. Рассматривались события,

приводящие к совпадению фотоотсчетов каких-либо из пар детекторов, в пределах заданного временного окна (что, по сути, являлось так называемой, постселекцией). Если обозначить фазы для каждого из двух фотонов, набегавшие в плечах интерферометров как α_j, β_j , то соответствующие состояния будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 |\psi_{00}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[|00\rangle + e^{i(\alpha_1 - \alpha_0 + \beta_1 - \beta_0 + t)} |11\rangle + e^{i(\alpha_2 - \alpha_0 + \beta_2 - \beta_0 + t)} |22\rangle \right] \\
 |\psi_{01}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[|00\rangle + e^{i(\alpha_1 - \alpha_0 + \beta_1 - \beta_0)} |11\rangle + e^{i(\alpha_2 - \alpha_0 + \beta_2 - \beta_0 - t)} |22\rangle \right] \\
 |\psi_{02}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[|00\rangle + e^{i(\alpha_1 - \alpha_0 + \beta_1 - \beta_0 - t)} |11\rangle + e^{i(\alpha_2 - \alpha_0 + \beta_2 - \beta_0)} |22\rangle \right],
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где, к примеру, $|\psi_{01}\rangle$ соответствует состоянию, приводящему к отсчетам в детекторах 0_A и 1_B , а состояние $|11\rangle$ - ситуации, при которой оба фотона прошли через "средние" плечи интерферометра, коэффициент $t = 2\pi/3$ связан со скачком фазы при отражении.

Рассмотренная схема может быть очевидным образом обобщена на состояния размерности $d > 3$, однако это потребует использования многоплечевых интерферометров, что сопряжено со значительными технологическими трудностями. Также следует отметить, что схема существенно использует постселекцию, что тоже не является ее достоинством.

Интересная схема, позволяющая готовить состояния произвольной размерности была предложена в работе [14]. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1.2.

В рассматриваемом эксперименте накачкой для СПР служила последовательность фемтосекундных импульсов от титан-сапфирового лазера, работавшего в режиме синхронизации мод, что обеспечивало фиксированные фазовые соотношения между различными импульсами. Пусть накачка состоит из последовательности d импульсов, тогда состояние, генерируемое

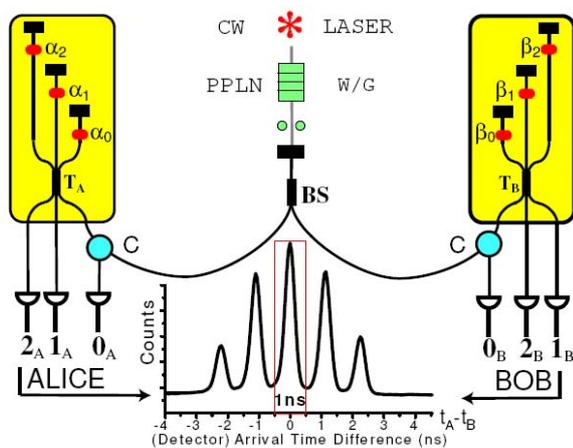


Рис. 1.1. Интерферометрическая схема приготовления перепутанных состояний двух кубитов [13].

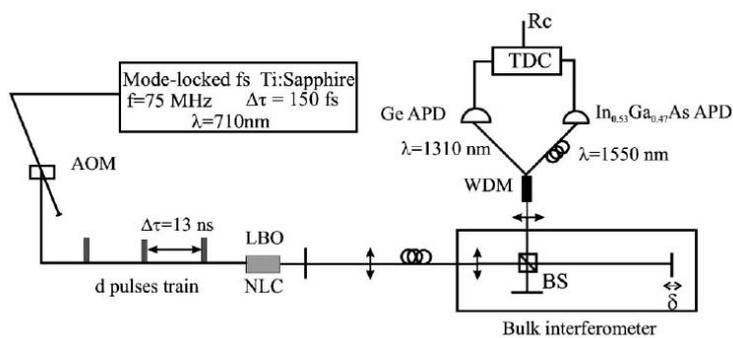


Рис. 1.2. Схема экспериментальной установки для приготовления кубитов с помощью последовательности импульсов накачки [14].

в процессе СПР, имеет вид:

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^d c_j e^{i\varphi_j} |j_A, j_B\rangle, \quad (1.2)$$

где $|j_A, j_B\rangle$ соответствует паре фотонов в модах A и B , рожденных j -м импульсом. Относительные фазы и амплитуды состояний могут изменяться с помощью введения в накачку фазовых и амплитудных модуляторов. Основным недостатком такой схемы является необходимость использования d -плечевого интерферометра для полной характеристики приготовленного состояния. В рассматриваемой работе, однако, использовался двухплечевой интерферометр, для которого было получено следующее выражение для зависимости видности двухфотонной интерференции от размерности состояний на входе: $V = V_{max}(d - 1)/d$, которое и проверялось экспериментально. Значение V_{max} ограничено сверху из-за возможности рождения более чем одной пары за импульс. Для него была получена оценка $V_{max} = (0.97 \pm 0.01)$. В работе [15] для анализа приготовленных аналогичным образом состояний использовался интерферометр Фабри-Перо.

п.1.1.2. Схемы использующие орбитальный угловой момент фотонов

Основной идеей методов, рассматриваемых ниже¹, является использование в качестве базисных состояний фотонов с отличным от нуля угловым моментом. Как известно, таким свойством обладают, так называемые, моды Гаусса-Лаггера. Структура некоторых интересующих нас мод показана на рис. 1.3.

¹Этот и следующий пункт приведены здесь из соображений самодостаточности изложения. Значительно более подробный обзор работ посвященных пространственным корреляциям в СПР приведен в главе 3.

Здесь LGV_{pl} означает, моду с p узлами в радиальном направлении и топологическим зарядом l (при обходе вокруг центра пучка фаза меняется на $2\pi l$). Индекс l определяет угловой момент фотона в единицах \hbar . Моды Гаусса-Лаггера образуют ортогональный базис, что делает их удобными для реализации многоуровневых систем.

В работе [16] была экспериментально продемонстрирована возможность приготовления перепутанных состояний кутритов с использованием орбитального углового момента. Использовались моды LG_{0l} со значениями $l = -2, -1, \dots, 2$. Для создания пучков с ненулевым орбитальным моментом применялись фазовые голограммы. Кроме того, было показано, что с помощью смещенной голограммы можно создавать суперпозицию Гауссовой (LGV_{00}) моды и моды LGV_{0l} с хорошо определенными относительными амплитудой и фазой (пример такой суперпозиции приведен на рис. 1.3 под названием "c" mode). В измерительной части схемы использовались аналогичные голограммы, установленные перед одномодовыми волокнами, что позволяло проектировать состояние на соответствующее голограмме. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1.4.

В каждую из двух пространственных мод неколлинеарного СПР помещались две голограммы, первая из которых преобразовывала входную моду в суперпозицию LGV_{00} и LGV_{01} , а вторая - LGV_{00} и LGV_{0-1} . Смещением этих голограмм по горизонтали и вертикали можно было контролировать относительные амплитуды и фазы каждой моды.

Рассмотренная методика допускает обобщения на случай произвольной размерности, теоретически рассмотренные, например, в работе [17].

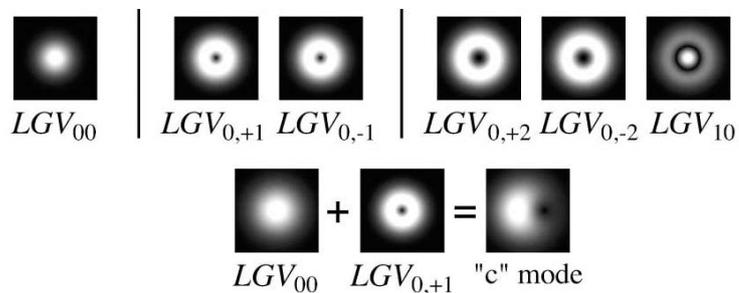


Рис. 1.3. Некоторые моды Гаусса-Лаггера.

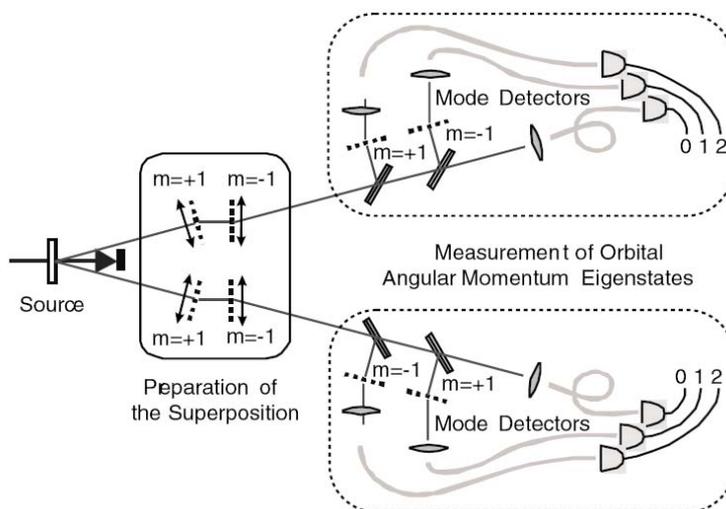


Рис. 1.4. Схема приготовления перепутанных состояний двух кутритов с использованием орбитального углового момента фотонов [16].

п.1.1.3. Схемы использующие корреляции в угловом спектре СПР

Пары фотонов, рождающиеся в процессе СПР, коррелированы по поперечным компонентам волновых векторов в силу условий пространственного синхронизма (или, что то же самое, закона сохранения импульса). Корреляции такого рода могут быть использованы для приготовления перепутанных состояний кудитов.

Эта идея была реализована в работе [18]. Схема эксперимента приведена на рис. 1.5.

Коррелированные пары фотонов рождались в процессе неколлинеарного СПР типа-II. В каждый из пучков помещалась маска с D щелями, амплитудный коэффициент пропускания которой имел вид:

$$A(x) = \sum_{l=-l_D}^{l_D} \prod \left(\frac{x - ld}{2a} \right), \quad (1.3)$$

где $\prod(x)$ означает "прямоугольную" функцию, d - расстояние между щелями, а a - ширина щели. Накачка фокусировалась таким образом, чтобы размер пучка в плоскости масок был порядка ширины щелей. Вектор состояния бифотона, прошедшего через маски, в таком случае имеет вид:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{D} \sum_{l=-l_D}^{l_D} e^{ik(d^2l^2/2z_A)} |l_1\rangle |-l_2\rangle, \quad (1.4)$$

где

$$|l_j\rangle = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int dq_j e^{-iq_j ld} \text{sinc}(q_j a) |1_{q_j}\rangle. \quad (1.5)$$

Физически, состояние $|l_j\rangle$ соответствует ситуации при которой фотон в моде j прошел через щель с номером l . Из вида вектора состояния (1.4) ясно, что если фотон в моде 1 проходит через щель l , то соответствующий

фотон в моде 2 проходит через щель $-l$. Состояние (1.4), таким образом имеет вид максимально перепутанного состояния кудитов с $d = 2l_D$ (в эксперименте использовались маски с $D = 4$ и $D = 8$). Измерительная схема была устроена следующим образом: 2 детектора с малой апертурой были установлены после масок и объединены схемой совпадений. Положение одного из детекторов фиксировалось около щели с некоторым номером l , второй же детектор сканировался. При этом совпадения отсчетов детекторов наблюдались только при положении второго детектора, соответствующем щели с номером $-l$. Скорость счета совпадений при различных положениях детекторов определяет коэффициенты в разложении $|\psi\rangle$ по базису состояний $|l_1\rangle | -l_2\rangle$.

Аналогичная схема, но реализованная с помощью двумерной матрицы из оптических волокон, была продемонстрирована в работе [19].

Заметим, что существует принципиальное ограничение на размерность кудитов, которые можно приготовить в рассмотренных схемах. Оно определяется степенью перепутанности состояния бифотона, которую можно приближенно оценить как отношение ширины углового распределения единичных отсчетов к ширине углового распределения совпадений в схеме рис. 1.5 при отсутствии масок (см. например, [20]).

п.1.1.4. Методы, основанные на использовании поляризационных состояний бифотонов

Поляризационные степени свободы фотонов представляются особенно удобным объектом для экспериментального приготовления состояний кудитов. Основной причиной является простота осуществления поляризационных преобразований, для которых достаточно линейных оптических эле-

ментов типа фазовых пластинок. Это позволяет легко контролировать приготавливаемое состояние, что выгодно отличает данную группу методов от рассмотренных ранее. Кроме того, разработанные методы поляризационной томографии позволяют в результате относительно простой процедуры полностью восстанавливать вектор состояния приготовленной квантовой системы.

По видимому, первой работой, в которой была предложена схема, позволяющая приготавливать произвольное состояние поляризационного кутрита, была работа [21]. В работе рассматриваются поляризационные состояния одномодовых бифотонов, генерируемых в процессе коллинеарного вырожденного по частоте СПР. Вектор состояния такой системы имеет вид:

$$|\psi\rangle = c_1 |2_H, 0_V\rangle + c_2 |1_H, 1_V\rangle + c_3 |0_H, 2_V\rangle, \quad (1.6)$$

где H и V - ортогональные поляризационные моды (для определенности, соответствующие горизонтальной и вертикальной поляризациям). Состояния $|2_H, 0_V\rangle$ и $|0_H, 2_V\rangle$ соответствуют синхронизму типа-I, а состояние $|1_H, 1_V\rangle$ - синхронизму типа-II. Экспериментальная установка изображена на рис. 1.6.

В качестве накачки использовалась вторая гармоника фемтосекундного лазера с шириной импульса порядка 100 фс на длине волны 800 нм. После полуволновой пластинки HWP1 линейно поляризованная накачка разделялась призмой глана, отражающей вертикально и пропускающей горизонтально поляризованный свет. В отраженном плече повернутая на 45° полуволновой пластинкой HWP2 накачка рождала пары фотонов в двух кристаллах ВВО типа-I с ортогонально ориентированными осями (состояния $|2_H, 0_V\rangle$ и $|0_H, 2_V\rangle$), после чего отражалась УФ зеркалом. Вторая поляризационная компонента накачки, после отражения от выходного дихро-

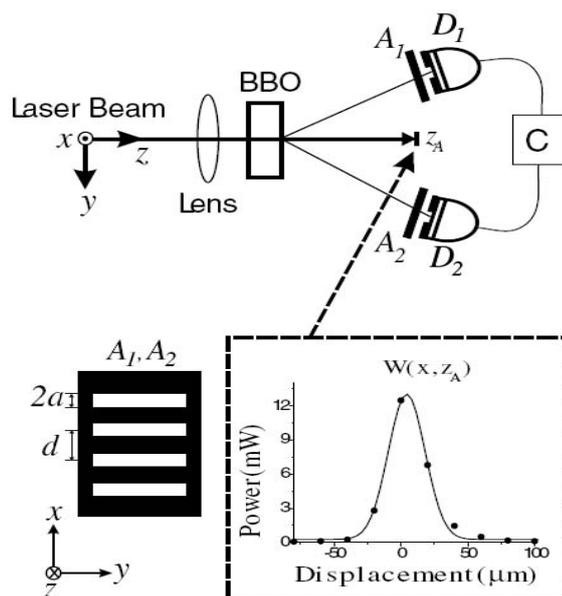


Рис. 1.5. Схема приготовления перепутанных состояний кудитов с использованием поперечных корреляций импульсов фотонов [18].

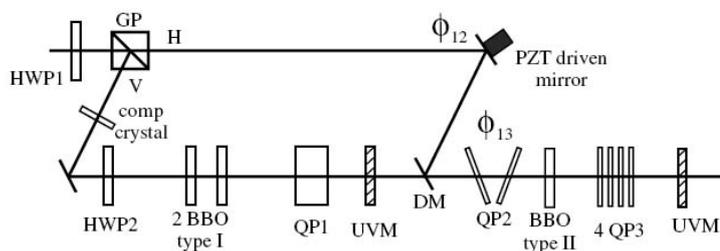


Рис. 1.6. Схема приготовления произвольного состояния поляризационно-кудита [21].

ичного зеркала интерферометра Маха-Цандера, рождала пары фотонов в кристалле типа-II (состояние $|1_H, 1_V\rangle$). Относительные фазы φ_{12} и φ_{13} между коэффициентами в (1.6) варировались с помощью пьезоподачи и пары кварцевых пластинок с изменяемым наклоном, соответственно. Для компенсации групповых задержек использовались кварцевые пластины QR1 и QR3. В измерительной части установки использовалась томографическая схема, предложенная в [22]. Мера соответствия состояний, полученных в результате эксперимента, ожидаемым (так называемая, *fidelity*) достигала значений более 0.98, что свидетельствует о высоком качестве приготовления состояний.

В качестве недостатка рассмотренного метода можно отметить использование импульсной накачки с вытекающими отсюда сложностями с обеспечением заданных фазовых соотношений и необходимостью компенсации групповых задержек.

Этих недостатков лишена схема предложенная в работе [23]. В работе показано, что произвольное состояние кутрита или кукварта может быть получено из немаксимально перепутанного состояния двух кубитов с помощью локальных унитарных преобразований. В терминах поляризационных состояний бифотонов произвольный кукварт имеет вид:

$$|\psi\rangle = c_1 |H_1 H_2\rangle + c_2 |H_1 V_2\rangle + c_3 |V_1 H_2\rangle + c_4 |V_1 V_2\rangle, \quad (1.7)$$

где индексы 1 и 2 соответствуют двум различным пространственным модам. Существуют такие локальные (т.е. производимые только в одной из пространственных мод) преобразования U и W , что:

$$|\psi\rangle = U \otimes W |\chi\rangle, \quad (1.8)$$

где $|\chi\rangle = x |H_1H_2\rangle + \sqrt{1-x^2} |V_1V_2\rangle$ - «затравочное» состояние. Схема предложенной установки приведена на рис. 1.7.

«Затравочное» состояние получается в результате двойного прохождения нелинейного кристалла, вырезанного для синхронизма типа-I непрерывной накачкой, поляризация которой поворачивается перед вторым проходом фазовой пластинкой. Изменение угла поворота соответствует изменению x . Предложенная схема была экспериментально реализована в работе [24]. С ее помощью были приготовлен полный набор состояний из взаимно несмещенных базисов в пространстве кутритов с базисными состояниями $\{|H_1H_2\rangle, |V_1V_2\rangle, |\psi^+\rangle = 1/\sqrt{2}(|H_1V_2\rangle + |V_1H_2\rangle)\}$.

Простая схема для приготовления определенного набора состояний поляризационных куквартов была предложена и реализована экспериментально в работе [25]. В этой схеме невозможно приготовление произвольного состояния, однако ее оказывается достаточно для получения всех состояний из трех взаимно несмещенных базисов в пространстве куквартов, что, как мы увидим далее, является важной для приложений задачей. Экспериментальная установка изображена на рис. 1.8.

Существенной особенностью этой схемы является использование только одного кристалла для приготовления всех базисных состояний. Это оказывается возможным при использовании частотно-невырожденного режима СПР. Кристалл, вырезанный для коллинеарного частотно-невырожденного синхронизма типа-I накачивается излучением непрерывного лазера (в работе использовался He-Cd). Состояние на выходе кристалла имеет вид: $|\psi\rangle = |H_1H_2\rangle$. С помощью кварцевых пластинок с переменной толщиной это состояние преобразовывалось в остальные базисные. Переход к другим базисам (например циркулярному), осуществлялся с помощью пластинок QR и HP. Для анализа приготовленных состояний использовалась томогра-

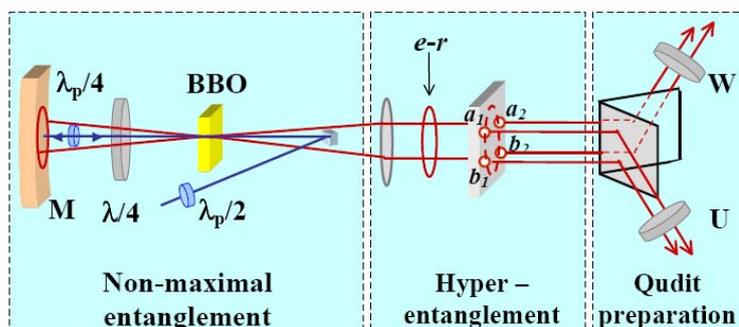


Рис. 1.7. Схема приготовления произвольного состояния поляризационного кутрита с помощью локальных преобразований [23].

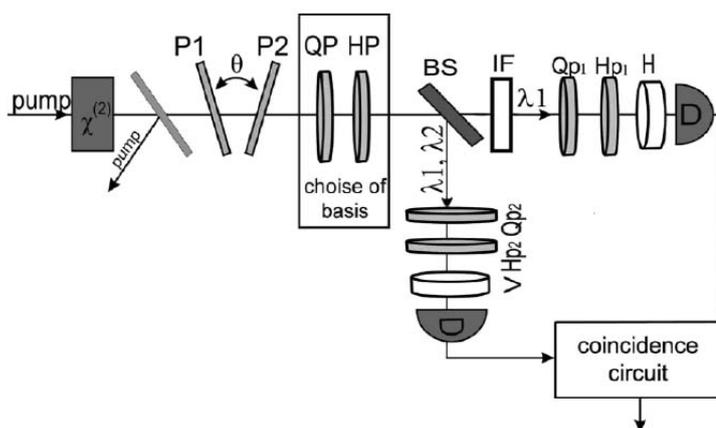


Рис. 1.8. Схема приготовления куквартов с помощью поляризационных преобразований [25].

фическая схема, подробно рассмотренная в [26]. Важным преимуществом этого метода, помимо его простоты, является использование коллинеарного режима СПР, что весьма удобно для применения в протоколах передачи информации.

Хорошо известны схемы приготовления перепутанных белловских состояний поляризационных квартов [27, 28]. Обе схемы используют неколлинеарный режим СПР, позволяя готовить поляризационно-угловые белловские состояния вида $|H_{\theta_1} V_{\theta_2}\rangle \pm |V_{\theta_1} H_{\theta_2}\rangle$ и $|H_{\theta_1} H_{\theta_2}\rangle \pm |V_{\theta_1} V_{\theta_2}\rangle$, где $\theta_{1,2}$ - индексы, обозначающие различные пространственные моды. Метод, предложенный в работе [27] использует неколлинеарный режим СПР с синхронизмом типа-II, а в работе [28] используются два кристалла с синхронизмом типа-I.

Приготовлению поляризационно-частотных белловских состояний посвящена работа [29]. Схема предложенной экспериментальной установки приведена на рис. 1.9. Ключевым элементом схемы является интерферометр Маха-Цандера, в оба плеча которого помещены кристаллы иодата лития, вырезанные для коллинеарного, частотно невырожденного синхронизма типа-I. В одном из плеч интерферометра поляризация излучения поворачивается полуволновой пластинкой, таким образом, на выходе интерферометра поляризационное состояние бифотонного поля имеет вид $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H_{\omega_1} H_{\omega_2}\rangle + e^{-i\varphi} |V_{\omega_1} V_{\omega_2}\rangle)$, где относительную фазу φ между компонентами состояния можно менять смещением подвижного зеркала М. При $\varphi = 0$ генерируется белловское состояние $|\Phi^+\rangle$, при $\varphi = \pi$ - белловское состояние $|\Phi^-\rangle$. Состояние $|\Psi^+\rangle$ получается из $|\Phi^-\rangle$ с помощью полуволновой пластинки, ориентированной под углом 22.5° . Для получения синглетного состояния $|\Psi^-\rangle$ использовалась кварцевая пластинка QR, толщина которой подбиралась так, чтобы набеги фаз между обыкновенной и необыкновен-

ной волнами на частотах ω_1 и ω_2 отличались на π .

Заметим, что при увеличении мощности накачки или коэффициента параметрического преобразования состояния поляризационно-частотных куквартов переходят в, так называемые, «макроскопические аналоги состояний Белла» - неклассические состояния света с большим числом фотонов на моду. Такой свет обладает необычными поляризационными свойствами [30]. В частности макроскопический аналог синглетного состояния $|\Psi^-\rangle$ - «скалярный свет», впервые описанный в работе [31], неполяризован как во втором, так и в четвертом порядке по полю, более того, для него оказываются подавленными флуктуации всех параметров Стокса. Приготовление макроскопических аналогов состояний Белла оказывается возможным в схеме, полностью аналогичной представленной на рис. 1.9, что было недавно продемонстрировано экспериментально в работе [32].

§ 1.2. Бифотоны как поляризационные кукварты. Роль перестановочной симметрии и законов сохранения

Как мы видели выше, представление поляризационного состояния пары фотонов в виде кутрита (при рассмотрении только поляризационных степеней свободы) или кукварта (при наличии дополнительных пространственных или частотных степеней свободы) общепринято в литературе. В то же время под куквартом в квантовой теории информации понимают состояние пары кубитов (вообще говоря, перепутанное), т.е. существенно *различимых* двухуровневых систем. При этом фотоны в паре, с очевидностью, представляют собой тождественные бозоны, что ставит вопрос об

уместности такого описания и условиях его применимости. Неоднозначности возникают также при попытке описать перепутывание в бифотонных системах, а именно некоторые факторизованные состояния поляризационных куквартов представляются перепутанными уже в силу бозонной перестановочной симметрии [33]. Ниже мы покажем, что под различными кубитами в описанных экспериментах следует понимать не состояния отдельных фотонов пары, а некоторые инвариантные относительно перестановок состояния в заданных модах поля. При этом трудностей с симметризацией не возникает.

п.1.2.1. Эквивалентность поляризационных состояний бифотонов и состояний пары перепутанных кубитов

Абстрактный кукварт представляет собой состояние квантовой системы любой природы вида принадлежащее четырехмерному гильбертову пространству

$$|\Psi\rangle^{(4)} = c_1 |0\rangle + c_2 |1\rangle + c_3 |2\rangle + c_4 |3\rangle \in \mathcal{H}^{(4)}.$$

Это состояние эквивалентно перепутанному состоянию пары кубитов

$$|\Psi\rangle^{(4)} = c_1 |0\rangle_1 |0\rangle_2 + c_2 |0\rangle_1 |1\rangle_2 + c_3 |1\rangle_1 |0\rangle_2 + c_4 |1\rangle_1 |1\rangle_2 \in \mathcal{H}^{(4)} = \mathcal{H}^{(2)} \otimes \mathcal{H}^{(2)},$$

где $\{|0\rangle_{1,2}, |1\rangle_{1,2} \in \mathcal{H}^{(2)}\}$ - базисные состояния кубитов, принадлежащие гильбертову пространству размерности два. Заметим, что возможность однозначной расстановки индексов 1, 2, т.е. различимость кубитов - обязательное условие для введения в пространстве $\mathcal{H}^{(4)}$ структуры тензорного произведения. После того, как такая структура введена можно говорить о перепутывании между кубитами 1 и 2. В частности, характеризовать ее

с помощью количественных мер таких как *concurrence* [34]² или число Шмидта K , в рассматриваемом случае выражающимися следующим образом:

$$C = 2 |c_1 c_4 - c_2 c_3|; K = \frac{1}{1 - C^2/2}. \quad (1.9)$$

Если кубиты *неразличимы*, то в силу квантово-механического принципа тождественности их состояние должно быть симметрично или антисимметрично относительно перестановки индексов, нумерующих кубиты. В обоих случаях, получаем:

$$|\Psi\rangle^{(3)} = c'_1 |0\rangle_1 |0\rangle_2 + \frac{c'_2}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |1\rangle_2 \pm |1\rangle_1 |0\rangle_2) + c'_3 |1\rangle_1 |1\rangle_2 \in \mathcal{H}^{(3)},$$

т.е. размерность пространства состояний двух тождественных кубитов равна трем, и оно не может быть представлено в виде тензорного произведения подпространств меньшей размерности.

Перепутывание в системе двух различных кубитов

Чтобы лучше представить себе роль требования различимости кубитов при описании перепутывания, рассмотрим его с квантово-информационной точки зрения, а именно, как ресурс необходимый для осуществления некоторых протоколов квантовой информации (например, телепортации). Возьмем ситуацию, типичную для многих квантово-информационных протоколов: пусть две стороны, условно называемые Алисой и Бобом, имеют в своем распоряжении n одинаковых копий двух-кубитной системы в, вообще говоря, смешанном состоянии ρ (у каждого из них при этом находится только одна из частиц пары). Обе стороны имеют возможность производить

²В работах [34, 35] дается более общее определение concurrence, позволяющее определять степень перепутанности смешанных состояний пар кубитов, приведенная формула является его частным случаем для кукварта в чистом состоянии.

со своей половиной пары любые локальные преобразования и измерения и обмениваться информацией по классическому каналу (Local Operations and Classical Communication). С помощью только таких операций Алиса и Боб могут преобразовать n копий состояния ρ в m копий состояния Белла $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle_1 |1\rangle_2 - |1\rangle_1 |0\rangle_2)$ (значение m точно определено лишь в асимптотике больших n), эту процедуру называют очищением перепутывания (entanglement distillation). Величина $E_D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$, называемая *перепутыванием очищения* (entanglement of distillation) характеризует степень перепутывания системы относительно синглетного белловского состояния [36]. Приняв теперь перепутывание очищения белловского синглета за единицу (так называемый *ebit*), мы получим величину, изменяющуюся от 0 до 1, равную 0 для факторизуемых состояний и 1 для максимально перепутанных белловских состояний.

Информационный смысл введенной меры можно выяснить, если рассмотреть, например, один из вариантов использования перепутанных состояний в протоколах коррекции ошибок [37]. Пусть Алиса и Боб ставят своей целью обмен квантовой информацией с помощью неидеального, шумящего канала. Для этого, Алиса готовит n двухчастичных систем в состоянии $|\Psi^-\rangle$ и отправляет Бобу одну из частиц каждой пары. После прохождения через шумящий канал частицы оказываются в состоянии ρ . Воспользовавшись процедурой очищения перепутывания, Алиса и Боб получают $E_D(\rho) \times n$ копий $|\Psi^-\rangle$, которые могут быть использованы для передачи $E_D(\rho) \times n$ кубит информации посредством телепортации.

Аналогичным образом определяется *перепутывание создания* $E_F(\rho)$ (entanglement of formation), характеризующее количество *ebit* (белловских синглетов) необходимое для создания состояния ρ с помощью LOCC (так называемое *разбавление перепутывания* (entanglement dilution)) [38].

Для чистых состояний оказывается возможным введение универсальной меры перепутывания. В работе Беннетта и соавторов [36] было показано, что для чистого состояния $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ где $\Psi \in \mathcal{H}^{(n)}$ выполняется равенство

$$E_D(\rho) = E_F(\rho) = E(\rho), \quad (1.10)$$

где $E(\rho)$ - энтропия фон Неймана, определяемая как

$$E(\rho) = -\text{Tr}\rho_1 \log_2 \rho_1 = -\text{Tr}\rho_2 \log_2 \rho_2, \quad (1.11)$$

где $\rho_{1,2} = \text{Tr}_{2,1}\rho$ - матрицы плотности каждой из подсистем. Можно показать [34, 35], что энтропия является монотонной функцией concurrence, т.е. их использование для характеристики перепутывания эквивалентно.

Мы видим, что в самом определении перепутывания как информационного ресурса существенно используется понятие *локальных преобразований*. Таким образом, прежде чем говорить о перепутывании в некоторой физической системе, необходимо определить класс физически реализуемых локальных преобразований, осуществляемых над подсистемами. В работах [39, 40] показано, что именно локальные наблюдаемые определяют разбиение системы на составляющие подсистемы и соответствующую структуру тензорного произведения на пространстве состояний. Разделение на подсистемы очевидно, если кубиты реализованы как состояния двух различных частиц. В интересующем же нас случае двух тождественных бозонов требуется дополнительное рассмотрение.

Перепутывание в системе двух тождественных фотонов

В экспериментах о кукуартах говорят в случае, когда помимо поляризационных степеней свободы присутствует еще одна - фотоны могут населять

одну из двух хорошо определенных пространственных или частотных мод, характеризуемых волновым вектором $\vec{k}_j, j = \{1, 2\}$. Обозначим одночастичные состояния следующим образом

$$|\varphi_J(i)\rangle = a_J^\dagger |\text{vac}\rangle, \quad \in \mathcal{H}, \quad \Omega_J = \{1H, 1V, 2H, 2V\} \quad (1.12)$$

Далее для краткости индекс $J = jH$ или $J = jV$ обозначает состояние с волновым вектором \vec{k}_j и базисными состояниями поляризации H и V , а индекс i обозначает совокупность переменных, относящихся к i -й частице. Одночастичное пространство состояний \mathcal{H} оказывается таким образом четырехмерным. Вектор состояния пары фотонов с учетом бозонной симметрии принимает вид

$$|\Psi_{J_1, J_2}\rangle = a_{J_1}^\dagger a_{J_2}^\dagger |\text{vac}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}} \sum_{\mathcal{P}_2} |\varphi_{J_1}(i_1)\rangle \otimes |\varphi_{J_2}(i_2)\rangle, \quad (1.13)$$

где \mathcal{P}_2 означает суммирование по перестановкам номеров фотонов

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix}, \quad J_k \in \Omega_J, \quad k = 1, 2. \quad (1.14)$$

При этом состояние пары фотонов - вектор в гильбертовом пространстве размерности 10: $|\Psi_{J_1, J_2}\rangle \in \mathcal{H}^{(10)}$.

В такой системе могут присутствовать два типа корреляций: корреляции, обусловленные только перестановочной симметрией частиц, и дополнительные корреляции, подобные тем, что рассмотрены выше для различных кубитов. В общем случае их сложно разделить, поэтому в литературе часто говорят просто о «квантовых корреляциях», количественной мерой которых является энтропия фон Неймана одночастичных подсистем [41, 42]. Чисто «перестановочные» корреляции не являются перепутыванием в квантово-информационном смысле, поскольку для конкретной ча-

стицы из пары невозможно даже в принципе определить локальные преобразования в силу принципа тождественности³. Естественным образом возникает вопрос о возможности реализации различных кубитов в системах тождественных частиц и возможности перенесения на них хорошо известных результатов квантовой информации.

В важнейшем для нас случае бифотонов рождающихся в процессе СПР, эту трудность можно обойти благодаря дополнительному ограничению на число частиц в пространственных модах. Действительно, законы сохранения энергии и импульса для фотонов пары (условия фазового синхронизма) делают невозможной ситуацию, при которой оба фотона окажутся в моде с одинаковым волновым вектором \vec{k}_j ⁴. Т.е. эффективно десятимерное мерное гильбертово пространство сводится к четырехмерному подпространству состояний натянутом на базисные вектора

$$\{a_{1H}^\dagger a_{2H}^\dagger |vac\rangle, a_{1H}^\dagger a_{2V}^\dagger |vac\rangle, a_{1V}^\dagger a_{2H}^\dagger |vac\rangle, a_{1V}^\dagger a_{2V}^\dagger |vac\rangle\}.$$

Именно состояния из этого пространства мы будем в дальнейшем называть «поляризационными куквартами». Это пространство может быть отождествлено с пространством состояний двух различных кубитов. Важно отметить, что «эффективными кубитами», т.е. физически различными подсистемами, в данном случае будут не поляризационные состояния какого-либо одного фотона⁵, а однофотонные состояния совокупности двух поляризационных мод с одним волновым вектором, которые естественно обладают необходимой перестановочной симметрией. Т.е. имеем простран-

³Тем не менее, вопреки распространенному мнению, эти корреляции в бифотонных системах физически значимы и тесно связаны, например, с поляризационными свойствами одномодовых бифотонов («поляризационных кутритов»), которые непосредственно проявляются в экспериментах [33].

⁴Это можно назвать правилом суперотбора по числу частиц

⁵Это некорректное утверждение часто встречается в литературе и приняло форму общепринятого «сленга» затрудняющего понимание – постоянно приходится слышать о «различимых фотонах», хотя речь идет, естественно, об эквивалентных кубитах в смысле определенном в тексте.

ства состояний с базисами $\{|1_{1H}, 0_{1V}\rangle, |0_{1H}, 1_{1V}\rangle\}$ и $\{|1_{2H}, 0_{2H}\rangle, |0_{2H}, 1_{2V}\rangle\}$ для для поляризационных кубитов 1 и 2, соответственно. Локальным операциям над кубитами соответствуют поляризационные преобразования и измерения, производимые в каждой из пространственных мод по отдельности, которые всегда можно осуществить в эксперименте, в отличие от преобразований над конкретным фотоном. Аналогичный подход для систем тождественных фермионов использовался в работе [43], а вопросы количественной характеристики перепутывания «эффективных кубитов» подробно обсуждались в работе [44].

Такой способ разделения пространства состояний поляризационного кукварта на подсистемы, представляющие собой *различимые* поляризационные кубиты, позволяет разделить два типа перепутывания - чисто симметричные корреляции и дополнительное перепутывание между введенными поляризационными кубитами. Действительно, рассмотрим произвольное состояние поляризационного кукварта вида

$$|\Psi\rangle = c_1 a_{1H}^\dagger a_{2H}^\dagger |\text{vac}\rangle + c_2 a_{1H}^\dagger a_{2V}^\dagger |\text{vac}\rangle + c_3 a_{1V}^\dagger a_{2H}^\dagger |\text{vac}\rangle + c_4 a_{1V}^\dagger a_{2V}^\dagger |\text{vac}\rangle. \quad (1.15)$$

Поляризационное состояние моды j , т.е. состояние j -го кубита, описывается редуцированной матрицей плотности, матричные элементы которой вычисляются следующим образом:

$$\langle n_{jH}, n_{jV} | \rho_j | n'_{jH}, n'_{jV} \rangle = \sum_{n_{kH}, n_{kV}} \langle n_{jH}, n_{jV}, n_{kH}, n_{kV} | \rho | n'_{jH}, n'_{jV}, n_{kH}, n_{kV} \rangle, \quad (1.16)$$

где $\rho = |\Psi\rangle \langle \Psi|$ - поляризационная матрица плотности кукварта. Отличны от нуля только матричные элементы с $n_{jH} + n_{jV} = n'_{jH} + n'_{jV} = 1$ и искомая матрица плотности, например кубита 2, в базисе однокубитных

поляризационных состояний имеет вид

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} |c_1|^2 + |c_3|^2 & c_1 c_2^* + c_3 c_4^* \\ c_1^* c_2 + c_3^* c_4 & |c_2|^2 + |c_4|^2 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Собственные значения у ρ_1 и ρ_2 , естественно, совпадают, как и должно быть в двухкомпонентной системе. Вычисляя энтропию $S(\rho_j) = -\text{Tr} \rho_j \log_2 \rho_j$ получим выражение $S(\rho_j) = -\sum_{i=1,2} \lambda_i \log_2 \lambda_i$, с $\lambda_i = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - C^2})$, где величина «concurrency» $C = 2|c_1 c_4 - c_2 c_3|$ имеет в точности такой же вид, как и полученное Wootters'ом выражение для случая двух различимых кубитов. Эта энтропия характеризует именно перепутывание между поляризационными кубитами, поэтому условие $S = 0$ не означает полного отсутствия корреляций между фотонами [33]. Однако, именно такое определение перепутывания поляризационных куквартов представляется оправданным для описания экспериментальных ситуаций, рассматриваемых в дальнейшем.

Заметим, что если пространственные моды могут быть населены более чем одним фотоном, локальные преобразования будут включать в себя и преобразования изменяющие числа фотонов, которые затруднительно реализовать экспериментально. Заметим также, что случай поляризационного кутрита реализуется, когда «эффективные кубиты» оказываются тождественными, т.е. обе пространственные моды совпадают. В такой системе остаются только бозонные корреляции между фотонами пары.

п.1.2.2. Квантовая телепортация в системе тождественных фотонов

В качестве примера, поясняющего приведенный выше анализ, рассмотрим протокол квантовой телепортации в случае, когда все три системы, используемые в протоколе – тождественные бозоны. Нетрудно убедить-

ся, что телепортация в системе трех тождественных *кубитов* оказывается невозможной. Это является следствием того, что размерность пространства состояний двух различных кубитов равна четырем, а двух тождественных кубитов, из-за симметризации оказывается равной трем. Может показаться, что схема телепортации для *различимых частиц* напрямую неприменима к реальной ситуации с тождественными частицами, и поэтому интерпретация того что наблюдается в экспериментах [45, 46, 47] некорректна, поскольку используются результаты для различных частиц. Слова о том, что тождественность частиц не важна в процессе телепортации произносились и ранее [48], однако, насколько нам известно, четких разъяснений этого обстоятельства никто не сделал.

Для сравнения и самодостаточности изложения приведем сначала схему телепортации неизвестного состояния кубита для различных частиц, следуя [49].

Перепутанное состояние двух различных кубитов есть

$$|\Phi_{12}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle \otimes |0_2\rangle + |1_1\rangle \otimes |1_2\rangle) \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \quad (1.18)$$

здесь $|0_{1,2}\rangle, |1_{1,2}\rangle \in \mathcal{H}_{1,2}$ – ортонормированные базисные векторы для различных частиц 1 и 2, и, соответственно, двумерные пространства состояний. Пусть неизвестное квантовое состояние третьей частицы, которое требуется телепортировать, есть

$$|\varphi_3\rangle = \alpha|0_3\rangle + \beta|1_3\rangle \in \mathcal{H}_3, \quad (1.19)$$

Общее состояние трех разных частиц есть

$$|\varphi_3\rangle \otimes |\Psi_{12}^+\rangle \in \mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2. \quad (1.20)$$

Процесс телепортации сводится к проекционному измерению в базисе состояний Белла частиц 1 и 3. Любое измерение в квантовой механике описы-

вается разложением единицы в некотором пространстве состояний, в нашем случае в $\mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_1$

$$I_{123} = I_2 \otimes I_{13} = I_2 \otimes (|\Psi_{13}^+\rangle\langle\Psi_{13}^+| + |\Psi_{13}^-\rangle\langle\Psi_{13}^-| + |\Phi_{13}^+\rangle\langle\Phi_{13}^+| + |\Phi_{13}^-\rangle\langle\Phi_{13}^-|), \quad (1.21)$$

$$|\Phi_{13}^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle \otimes |0_3\rangle \pm |1_1\rangle \otimes |1_3\rangle), \quad |\Psi_{13}^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1\rangle \otimes |1_3\rangle \pm |1_1\rangle \otimes |0_3\rangle), \quad (1.22)$$

Замечательное наблюдение [49] состоит в том, что совместное состояние трех частиц может представлено как

$$|\Psi_{123}\rangle = \frac{1}{2} \{ (\alpha|0_2\rangle + \beta|1_2\rangle) | \otimes |\Phi_{13}^+\rangle + (\alpha|0_2\rangle - \beta|1_2\rangle) | \otimes |\Phi_{13}^-\rangle + (\alpha|1_2\rangle + \beta|0_2\rangle) | \otimes |\Psi_{13}^+\rangle + (\alpha|1_2\rangle - \beta|0_2\rangle) | \otimes |\Psi_{13}^-\rangle \}. \quad (1.23)$$

Измерение (1.21) над состоянием (1.20) приводит к 4-м равновероятным исходам, отвечающим проекциям на двухчастичные перепутанные состояния. После измерения состояние второй частицы оказывается равным одному из следующих состояний, в зависимости от того, какой один из 4-х исходов был получен:

$$|\psi_2^\pm\rangle = \frac{\text{Tr}_{13}\{|\Psi_{123}\rangle\langle\Psi_{123}||\Phi_{13}^\pm\rangle\langle\Phi_{13}^\pm|\}}{\text{Tr}_{123}\{|\Psi_{123}\rangle\langle\Psi_{123}||(I_2 \otimes |\Phi_{13}^\pm\rangle\langle\Phi_{13}^\pm|)\}} = \alpha|0_2\rangle \pm \beta|1_2\rangle, \quad (1.24)$$

$$|\phi_2^\pm\rangle = \frac{\text{Tr}_{13}\{|\Psi_{123}\rangle\langle\Psi_{123}||\Psi_{13}^\pm\rangle\langle\Psi_{13}^\pm|\}}{\text{Tr}_{123}\{|\Psi_{123}\rangle\langle\Psi_{123}||(I_2 \otimes |\Psi_{13}^\pm\rangle\langle\Psi_{13}^\pm|)\}} = \alpha|1_2\rangle \pm \beta|0_2\rangle, \quad (1.25)$$

Нумерация исходов от 1–4 требует 2 бита информации. В зависимости от исхода измерений получателю телепортируемого состояния передаются 2 бита по классическому каналу связи, чтобы совершить один из унитарных поворотов I – исход 1, σ_z – исход 2, σ_x – исход 3, $\sigma_x\sigma_z$ – исход 4, которые не зависят от исходного состояния. После этого состояние 2-ой частицы становится точно равным состоянию исходной частицы 1, которая была в неизвестном состоянии (1.19).

Телепортация в системе тождественных частиц. Рассмотрим ситуацию с тождественными частицами. Схема эксперимента представлена на рис.1.10. Кроме поляризационных степеней свободы в реальном эксперименте участвуют дополнительные степени свободы, например, три различных направления импульса k_1 , k_2 и k_3 , определяющих три пространственные моды.

Пусть неизвестное одночастичное квантовое состояние имеет вид

$$|\varphi_{(1)}\rangle = (\alpha a_{3H}^\dagger + \beta a_{3V}^\dagger) |\text{vac}\rangle = \alpha |\varphi_{3H}(i_3)\rangle + \beta |\varphi_{3V}(i_3)\rangle, \quad (1.26)$$

где нижний индекс (1) означает, что вектор состояния относится к одночастичному пространству.

Перепутанному состоянию ЭПР-пары в эксперименте отвечает состояние вида:

$$|\Phi_{(2)}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{1H}^\dagger a_{2H}^\dagger + a_{1V}^\dagger a_{2V}^\dagger) |\text{vac}\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{P}_2} (|\varphi_{1H}(i_1)\rangle \otimes |\varphi_{2H}(i_2)\rangle + |\varphi_{1V}(i_1)\rangle \otimes |\varphi_{2V}(i_2)\rangle), \quad (1.27)$$

которое, естественно, симметрично относительно перестановки частиц. Такое состояние пары фотонов может быть приготовлено, например, с помощью процесса СПР (соответствующие схемы подробно обсуждались выше).

Совместное состояние всех трех частиц также должно быть симметрич-

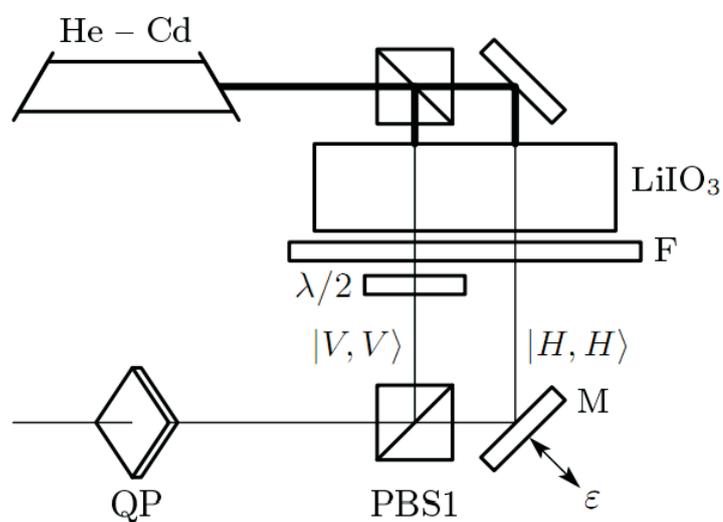


Рис. 1.9. Схема приготовления поляризационно-частотных белловских состояний [29].

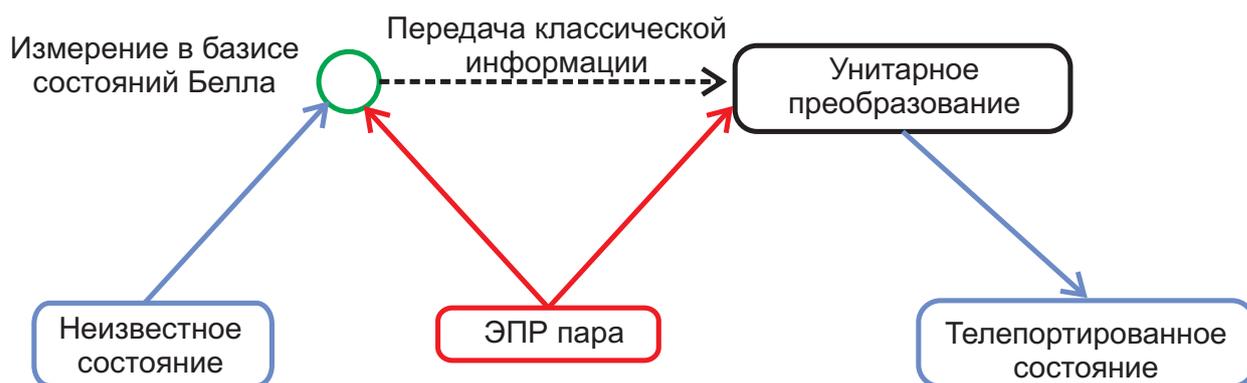


Рис. 1.10. Принципиальная схема телепортации в системе тождественных частиц.

ным по перестановкам, имеем

$$\begin{aligned}
|\Psi_{(3)}\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \sum_{\mathcal{P}_3} |\varphi_{(1)}\rangle \otimes |\Phi_{(2)}^+\rangle = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left((\alpha|\varphi_{3H}(3)\rangle + \beta|\varphi_{3V}(3)\rangle) \otimes \sum_{\mathcal{P}_2} (|\varphi_{1H}(i_1)\rangle \otimes |\varphi_{2H}(i_2)\rangle + |\varphi_{1V}(i_1)\rangle \otimes |\varphi_{2V}(i_2)\rangle) \right) + \\
&+ (\alpha|\varphi_{3H}(2)\rangle + \beta|\varphi_{3V}(2)\rangle) \otimes \sum_{\mathcal{P}_2} (|\varphi_{1H}(i_1)\rangle \otimes |\varphi_{2H}(i_3)\rangle + |\varphi_{1V}(i_1)\rangle \otimes |\varphi_{2V}(i_3)\rangle) + \\
&\left((\alpha|\varphi_{3H}(1)\rangle + \beta|\varphi_{3V}(1)\rangle) \otimes \sum_{\mathcal{P}_2} (|\varphi_{1H}(i_3)\rangle \otimes |\varphi_{2H}(i_2)\rangle + |\varphi_{1V}(i_3)\rangle \otimes |\varphi_{2V}(i_2)\rangle) \right).
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Или, более наглядно, в представлении чисел заполнения:

$$|\Psi_{(3)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha a_{3H}^\dagger + \beta a_{3V}^\dagger) (a_{1H}^\dagger a_{2H}^\dagger + a_{1V}^\dagger a_{2V}^\dagger) |\text{vac}\rangle. \tag{1.29}$$

В (1.29) можно перегруппировать слагаемые следующим образом

$$\begin{aligned}
|\Psi_{(3)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\alpha a_{2H}^\dagger + \beta a_{2V}^\dagger) (a_{1H}^\dagger a_{3H}^\dagger + a_{1V}^\dagger a_{3V}^\dagger) + \\
&+ (\alpha a_{2H}^\dagger - \beta a_{2V}^\dagger) (a_{1H}^\dagger a_{3H}^\dagger - a_{1V}^\dagger a_{3V}^\dagger) + \\
&+ (\alpha a_{2V}^\dagger + \beta a_{2H}^\dagger) (a_{1H}^\dagger a_{3V}^\dagger + a_{3V}^\dagger a_{1H}^\dagger) + \\
&+ (\alpha a_{2V}^\dagger - \beta a_{2H}^\dagger) (a_{1H}^\dagger a_{3V}^\dagger - a_{3H}^\dagger a_{1V}^\dagger)] |\text{vac}\rangle,
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Что в координатном представлении принимает вид:

$$\begin{aligned}
|\Psi_{123}\rangle &= \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \sum_{\mathcal{P}_3} ((\alpha|\varphi_{2H}(i_1)\rangle + \beta|\varphi_{2V}(i_1)\rangle) \otimes (|\varphi_{1H}(i_2)\rangle \otimes |\varphi_{3H}(i_3)\rangle + |\varphi_{1V}(i_2)\rangle \otimes |\varphi_{3V}(i_3)\rangle) + \\
&+ (\alpha|\varphi_{2H}(i_1)\rangle - \beta|\varphi_{2V}(i_1)\rangle) \otimes (|\varphi_{1H}(i_2)\rangle \otimes |\varphi_{3H}(i_3)\rangle - |\varphi_{1V}(i_2)\rangle \otimes |\varphi_{3V}(i_3)\rangle) + \\
&+ (\alpha|\varphi_{2V}(i_1)\rangle + \beta|\varphi_{2H}(i_1)\rangle) \otimes (|\varphi_{1H}(i_2)\rangle \otimes |\varphi_{3V}(i_3)\rangle + |\varphi_{3V}(i_2)\rangle \otimes |\varphi_{1H}(i_3)\rangle) + \\
&+ (\alpha|\varphi_{2V}(i_1)\rangle - \beta|\varphi_{2H}(i_1)\rangle) \otimes (|\varphi_{1H}(i_2)\rangle \otimes |\varphi_{3V}(i_3)\rangle - |\varphi_{3H}(i_2)\rangle \otimes |\varphi_{1V}(i_3)\rangle).
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Аналогично случаю различных частиц определяются состояния Белла и измерения в белловском базисе, с той лишь разницей, что для тожд-

дественных частиц операторы в $\text{Sym}\{\mathcal{H}^{\otimes 2}\}$, реализующие разложение единицы, должны быть симметричными по перестановкам. Имеем

$$I_{\text{Sym}\{\mathcal{H}^{\otimes 2}\}} = \quad (1.32)$$

$$I_{\text{Sym}\{\mathcal{H}^{\otimes 2}\}}^{\perp Bell} + |\Psi_{(2)}^+\rangle\langle\Psi_{(2)}^+| + |\Psi_{(2)}^-\rangle\langle\Psi_{(2)}^-| + |\Phi_{(2)}^+\rangle\langle\Phi_{(2)}^+| + |\Phi_{(2)}^-\rangle\langle\Phi_{(2)}^-|,$$

здесь $I_{\text{Sym}\{\mathcal{H}^{\otimes 2}\}}^{\perp Bell}$ – единичный оператор в подпространстве натянутом на векторы ортогональные белловским состояниям

$$|\Phi_{(2)}^\pm\rangle = \frac{1}{2} \left(\sum_{\mathcal{P}_2} |\varphi_{1H}(i_1)\rangle \otimes |\varphi_{3H}(i_2)\rangle \pm \sum_{\mathcal{P}_2} |\varphi_{1V}(i_1)\rangle \otimes |\varphi_{3V}(i_2)\rangle \right), \quad (1.33)$$

$$|\Psi_{(2)}^\pm\rangle = \frac{1}{2} \left(\sum_{\mathcal{P}_2} |\varphi_{1H}(i_1)\rangle \otimes |\varphi_{3V}(i_2)\rangle \pm \sum_{\mathcal{P}_2} |\varphi_{1V}(i_1)\rangle \otimes |\varphi_{3H}(i_2)\rangle \right). \quad (1.34)$$

Отметим, что состояния в (1.33) and (1.34) представляют собой сумму или разность двух слагаемых симметричных относительно перестановки частиц и не изменяют знака при перестановке частиц, в отличие от состояний в (1.22) для различимых частиц $|\Psi_{13}^-\rangle$ и $|\Phi_{13}^-\rangle$, которые антисимметричны относительно перестановки кубитов 1 и 3.

После измерений одночастичное состояние оказывается равным

$$|\psi_{(1)}^\pm\rangle = \frac{\text{Tr}_{\text{Sym}\{\mathcal{H}^{\otimes 2}\}}\{|\Psi_{(3)}\rangle\langle\Psi_{(3)}||\Phi_{(2)}^\pm\rangle\langle\Phi_{(2)}^\pm|\}}{\text{Tr}_{\text{Sym}\{\mathcal{H}^{\otimes 3}\}}\{|\Psi_{(3)}\rangle\langle\Psi_{(3)}|(|\Phi_{(2)}^\pm\rangle\langle\Phi_{(2)}^\pm|)\}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{\mathcal{P}_1} (\alpha|\varphi_{2H}(i_1)\rangle \pm \beta|\varphi_{2V}(i_1)\rangle), \quad (1.35)$$

$$|\phi_{(1)}^\pm\rangle = \frac{\text{Tr}_{\text{Sym}\{\mathcal{H}^{\otimes 2}\}}\{|\Psi_{(3)}\rangle\langle\Psi_{(3)}||\Psi_{(2)}^\pm\rangle\langle\Psi_{(2)}^\pm|\}}{\text{Tr}_{\text{Sym}\{\mathcal{H}^{\otimes 3}\}}\{|\Psi_{(3)}\rangle\langle\Psi_{(3)}|(|\Psi_{(2)}^\pm\rangle\langle\Psi_{(2)}^\pm|)\}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{\mathcal{P}_1} (\alpha|\varphi_{2V}(i_1)\rangle \pm \beta|\varphi_{2H}(i_1)\rangle). \quad (1.36)$$

Поскольку частицы неразличимы (формально индекс частицы под знаком суммы является «немым»), то одночастичные состояния (1.35) и (1.36) могут быть представлены как

$$|\psi_{(1)}^{\pm}\rangle = (\alpha|\varphi_{2V}(i)\rangle \pm \beta|\varphi_{2H}(i)\rangle) \rightarrow \alpha|0\rangle \pm \beta|1\rangle, \quad (1.37)$$

$$|\phi_{(1)}^{\pm}\rangle = (\alpha|\varphi_{2H}(i)\rangle \pm \beta|\varphi_{2V}(i)\rangle) \rightarrow \alpha|1\rangle \pm \beta|0\rangle. \quad (1.38)$$

Далее в зависимости от исхода, аналогично случаю для различимых частиц, происходит унитарный поворот состояния в (1.35, 1.36). После такого поворота телепортированное состояние оказывается идентичным исходному неизвестному состоянию (1.26).

Подчеркнем еще раз, что эффективные кубиты, участвующие в процессе телепортации, являются не состояниями какого-либо конкретного фотона, а состояниями «поляризационного кубита» - системы с базисными состояниями $|\varphi_{jH}(i)\rangle = a_{jH}^{\dagger} |\text{vac}\rangle$ и $|\varphi_{jV}(i)\rangle = a_{jV}^{\dagger} |\text{vac}\rangle$, где индекс j нумерует пространственные моды.

Таким образом, телепортация в системе тождественных частиц имеет место и аналогична телепортации для различимых частиц. Это оказывается возможным за счет того, что в экспериментальной ситуации кроме поляризационных степеней свободы существенную роль играют три различных направления импульса фотонов. В результате размерность двухчастичного пространства состояний симметризованного по перестановкам частиц оказывается равной 10. В эксперименте актуально только 4-мерное подпространство состояний из 10-мерного, в котором симметричные двухчастичные состояния являются аналогичными базисным белловским состояниям в двухчастичном пространстве двух различимых частиц. В результате процесс телепортации физически становится полностью эквивалентным процессу телепортации в системе трех различимых частиц.

§ 1.3. Заключение к главе 1

Первая глава носит в большей степени методический характер. Дан обзор основных методов экспериментального приготовления оптических систем высокой размерности. Особое внимание уделено схемам использующим поляризационные степени свободы фотонов. В связи с этим рассмотрены основные понятия, используемые при описании перепутывания в системе двух кубитов. Обсуждается вопрос о возможности представления поляризационных состояний пары фотонов как состояния пары различных кубитов. При этом особое внимание уделено обычно не обсуждающемуся в литературе вопросу о том, какие ограничения на такое "наивное" представление накладывает тождественность фотонов и следующая из нее бозонная симметрия их состояний. Показано, что эквивалентность поляризационных состояний двух фотонов паре различных кубитов имеет место только при наличии дополнительных ограничений на возможные состояния пары. В случае *бифотона*, т.е. пары фотонов, рождающихся в процессе спонтанного параметрического рассеяния света, эти ограничения естественным образом возникают как следствие условий фазового синхронизма. В этом случае можно описывать поляризационное состояние бифотона как состояние перепутанной пары *различимых* кубитов, что обычно и делается в литературе, однако без явного указания причин позволяющих это делать. Подробно рассмотрен пример протокола квантовой телепортации в системе тождественных фотонов. С учетом перестановочной симметрии в явном виде показано, что описание протокола в системе тождественных частиц эквивалентно описанию в системе различных кубитов.

ГЛАВА 2

Приготовление произвольных состояний поляризационных куквартов

Данная глава посвящена разработке и реализации методов приготовления состояний поляризационных куквартов. Предложен метод приготовления произвольных чистых состояний поляризационных куквартов, использующий всего два нелинейных кристалла. Обсуждается и экспериментально исследуется влияние эффектов частотной дисперсии на чистоту приготавливаемых состояний. Также рассмотрено приготовление смешанных состояний куквартов различной степени чистоты с использованием импульсной накачки.

§ 2.1. Схемы приготовления произвольных состояний поляризационных куквартов

Как отмечалось выше, использование поляризационных степеней свободы фотонов - один из наиболее интересных с точки зрения приложений способов реализации оптических кудитов. Мы рассмотрим две экспериментальных схемы приготовления произвольного состояния поляризационного кукварта. Одна из них является обобщением на четырехмерный случай схемы, предложенной в работе [21] для кутритов. Вторая использует раз-

ложение по модам Шмидта и опирается на идеи, в определенном смысле, аналогичные предложенным в работе [23], однако представляется более удобной для практического применения.

Произвольное чистое состояние поляризационного кукварта имеет вид:

$$|\psi\rangle = c_0 |H_1, H_2\rangle + c_1 |H_1, V_2\rangle + c_2 |V_1, H_2\rangle + c_3 |V_1, V_2\rangle. \quad (2.1)$$

мы будем рассматривать частотно-невырожденный случай, поэтому индексы мод 1, 2 соответствуют различным длинам волн λ_1, λ_2 . Перепишем вектор состояния в виде:

$$|\psi\rangle = |c_0| |H_1, H_2\rangle + |c_3| e^{i\varphi_{03}} |V_1, V_2\rangle + e^{i\varphi_{01}} (|c_1| |H_1, V_2\rangle + |c_2| e^{i\varphi_{12}} |V_1, H_2\rangle). \quad (2.2)$$

Заметим, что первые два состояния могут быть получены с помощью СПР типа I, а два состояния в скобках - с помощью типа II. Их когерентная суперпозиция с соответствующими относительными амплитудами и фазами представляет собой произвольное чистое состояние. Для экспериментальной реализации этой идеи была предложена схема, изображенная на рис. 2.1. В предлагаемой схеме используется импульсная накачка. Две поляризационные компоненты накачки разделяются на призме Глана-Томсона, служащей входным зеркалом интерферометра Маха-Цандера. Вертикальная компонента идет в отраженный канал, а горизонтальная - в проходящий. В отраженном канале расположены два кристалла ВВО, вырезанные для частотно-невырожденного синхронизма типа-I, с ортогонально ориентированными оптическими осями. Таким образом, поворачивая поляризацию накачки с помощью полуволновой пластинки HWP2 можно изменять соотношение между коэффициентами $|c_0|$ и $|c_3|$. Относительная фаза φ_{03} изменяется с помощью пары кварцевых пластинок QR2, эффективная толщина которых, а следовательно и набег фаз, регулируется путем изменения

угла наклона. Кварцевая пластинка QP1 служит для компенсации групповых задержек между горизонтально и вертикально поляризованными компонентами. Накачка отрезается ультрафиолетовым зеркалом UVM. В проходящем канале интерферометра пластинки HWP3 и QP3 контролируют соотношение между коэффициентами $|c_1|$ и $|c_2|$ и относительную фазу φ_{12} , соответственно. Для изменения фазы φ_{01} между отраженным и проходящим каналами одно из зеркал интерферометра установлено на пьезоэлектрической подаче PZT. На выходе интерферометра стоит дихроичное зеркало, отражающее накачку из проходящего пучка и пропускающее сигнал в отраженном. Два кристалла ВВО, вырезанные для синхронизма типа-II служат для генерации второй пары состояний из (2.2), групповые задержки между этими состояниями компенсируются пластинкой QP4.

Заметим, что возможности предложенной схемы не ограничиваются приготовлением только чистых состояний кувартов. Изменяя длину компенсаторов, можно постепенно переходить от когерентного сложения амплитуд состояний к некогерентному, т.е. изменять чистоту приготовляемого состояния.

Рассмотренная выше схема довольно громоздка, требует использования сбалансированного интерферометра, импульсной накачки и компенсации групповых задержек, что приводит к определенным трудностям при экспериментальной реализации. Оказывается, можно предложить значительно более простую схему, если ограничить свои задачи приготовлением только чистых состояний. Вначале рассмотрим математические аспекты проблемы. Известно, что произвольное перепутанное состояние пары кубитов может быть представлено в виде:

$$|\psi\rangle = \sqrt{\lambda_1} |A_1\rangle |A_2\rangle + \sqrt{\lambda_2} |B_1\rangle |B_2\rangle, \quad (2.3)$$

где $|A_j\rangle$ и $|B_j\rangle$ - базисные векторы пространства состояний каждого из кубитов в отдельности. Это выражение известно под названием разложения Шмидта. Коэффициенты $\lambda_{1,2}$ - собственные значения одночастичных матриц плотности каждого из кубитов (они, как известно совпадают), а вектора A_j и B_j составляют ортогональный базис в котором они диагональны. Таким образом, для приготовления произвольного состояния кубарта достаточно уметь экспериментально контролировать коэффициенты в разложении Шмидта и осуществлять переход между базисами. Заметим, что первая из операций изменяет степень перепутывания состояния (определенную любым разумным образом, например, можно использовать concurrence) и затрагивает степени свободы обоих кубитов, в этом смысле ее можно назвать «нелокальной». Преобразование же базисных векторов требует исключительно локальных операций.

Рассмотрим схему установки, изображенную на рис. 2.2. В ней используются два нелинейных кристалла, вырезанных для неколлинеарного, частотно невырожденного синхронизма типа-I. Накачкой служит излучение непрерывного лазера, направление линейной поляризации которого контролируется с помощью полуволновой пластинки WP, а относительная фаза между горизонтальной и вертикальной компонентами регулируется парой пластинок QR. Состояние бифотонов, рождающихся в процессе СПР при таких условиях имеет следующий вид:

$$|\psi\rangle = \sqrt{\lambda_1} |H_1\rangle |H_2\rangle + \sqrt{\lambda_2} |V_1\rangle |V_2\rangle, \quad (2.4)$$

где индексы 1,2 отвечают различным частотным модам. Состояние каждой из частотных мод в отдельности определяется матрицей плотности вида

$$\rho_j = \lambda_1 |H_j\rangle \langle H_j| + \lambda_2 |V_j\rangle \langle V_j|, \quad (2.5)$$

$j = 1, 2$ - индекс подсистемы.

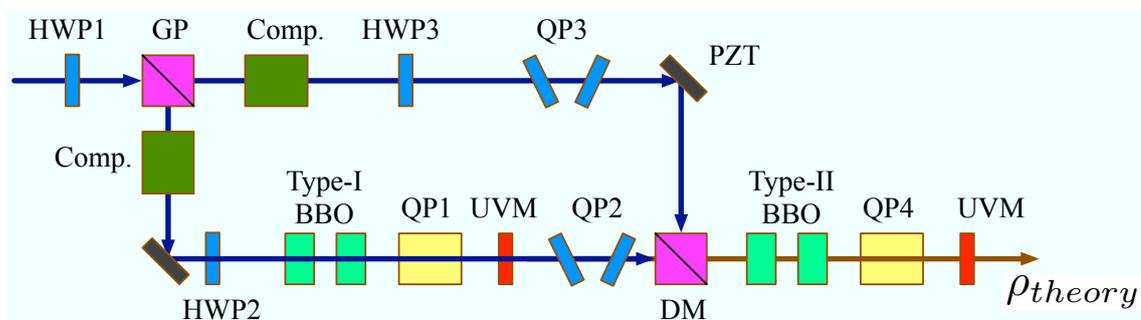


Рис. 2.1. Схема для приготовления произвольного состояния поляризационного кукварта.

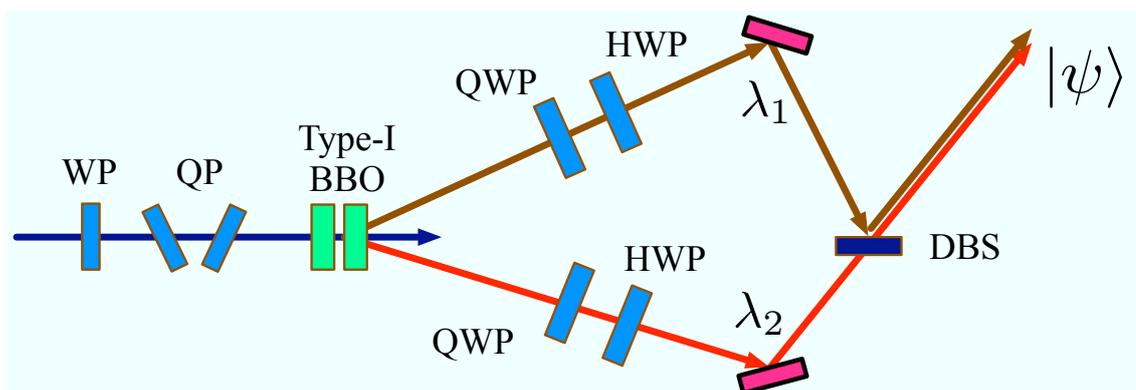


Рис. 2.2. Схема для приготовления произвольного чистого состояния поляризационного кукварта.

Таким образом, приготовлено состояние с требуемыми значениями коэффициентов в разложении Шмидта, но в фиксированном базисе (H-V). Преобразование к произвольному базису, однако, не составляет труда. Действительно, произвольное поляризационное состояние кубита может быть получено из заданного с помощью последовательности преобразований, осуществляемых четвертьволновой (QWP) и полуволновой (HWP) пластинками. Обозначим это преобразование U_j , тогда $|H_j\rangle \xrightarrow{U_j} |A_j\rangle$, при этом $|V_j\rangle \xrightarrow{U_j} e^{i\phi} |B_j\rangle$. Фаза ϕ может быть устранена с помощью пластинок QR. Тогда имеем преобразование:

$$|\psi\rangle \xrightarrow{U_1 \otimes U_2} \sqrt{\lambda_1} |A_1\rangle |A_2\rangle + \sqrt{\lambda_2} |B_1\rangle |B_2\rangle, \quad (2.6)$$

завершающее процедуру приготовления произвольного состояния кукварта. Из соображений экспериментального удобства, моды 1,2 разделены пространственно благодаря использованию неколлинеарного синхронизма. После осуществления преобразований в каждой моде они сбиваются на дихроичном светоделителе.

В качестве достоинства, присущего обоим схемам, следует отметить использование невырожденного по частоте режима, и соответственно, частотных, а не пространственных, мод. Это позволяет сформировать в итоге коллинеарный пучок бифотонов, что несомненно удобно для практического применения в различных протоколах.

§ 2.2. Реализация схемы приготовления произвольного состояния кукварта

Экспериментальная реализация схемы, изображенной на Рис. 2.2, состояла из двух этапов. Первый из них заключался в приготовлении факто-

ризованных состояний куквартов особого типа, предназначенных для реализации детерминистического протокола КРК, с помощью упрощенного варианта схемы с одним нелинейным кристаллом. Подробное описание этого эксперимента приведено в работе [50]. Более сложной оказалась задача о приготовлении перепутанных состояний, требующая использования двух кристаллов. Этот параграф посвящен обсуждению особенностей спонтанного параметрического рассеяния в такой ситуации, экспериментальным решениям, позволяющим добиться высокого качества приготовления перепутанных состояний, и полученным экспериментальным результатам.

Рассмотрим процесс СПР типа I в неколлинеарном, частотно- невырожденном режиме, происходящий в двух одинаковых кристаллах длины L , с ортогонально ориентированными оптическими осями. Пусть, для определенности, ось первого кристалла ориентирована вертикально, а второго - горизонтально. Мы рассмотрим случай непрерывной накачки, линейно поляризованной под углом 45° . В приближении плоской волны накачки состояния бифотонных пар, рождающихся в каждом из кристаллов по отдельности имеют вид [51]:

$$|\psi_{I,II}\rangle = \int d\Omega d\theta_1 d\theta_2 e^{i\frac{\Delta_z L}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\Delta_z L}{2}\right) a_{V,H}^\dagger(\theta_1, \omega_1 + \Omega) a_{V,H}^\dagger(\theta_2, \omega_2 - \Omega) |\text{vac}\rangle, \quad (2.7)$$

где $\Delta_z = k_o(\omega_1 + \Omega, \theta_1) + k_o(\omega_2 - \Omega, \theta_1) + k_e(\omega_p)$ - продольная расстройка фазового синхронизма (накачка является необыкновенной, а сигнальный и холостой фотоны - обыкновенными волнами в кристалле). Рассмотрим случай, когда угловые моды фиксированы, т.е. выделены с помощью узких диафрагм. Тогда интегрирование по углам снимается, и можно ограничиться исследованием частотного спектра. Соответствующие амплитуды

складываются когерентно, и полное состояние будет суперпозицией

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p=\{H,V\}} \int d\Omega F(\Omega, p) a_p^\dagger(\omega_1 + \Omega) a_p^\dagger(\omega_2 - \Omega) |\text{vac}\rangle, \quad (2.8)$$

где индекс p нумерует состояния поляризации, а

$$F(\Omega, H) \equiv F(\Omega) = \text{sinc} \left(\frac{\Delta_z L}{2} \right) \quad (2.9)$$

и

$$F(\Omega, V) = F(\Omega) e^{i\varphi(\Omega)} \quad (2.10)$$

- амплитуды бифотонов, рождающихся во втором и первом (по направлению пучка накачки) кристаллах, соответственно.

Наличие дополнительной относительной фазы $\varphi(\Omega)$ обусловлено двумя причинами: набегом фазы между поляризационными компонентами накачки в первом кристалле и появлением дополнительной фазы у фотонов, рожденных в первом кристалле при их прохождении через второй кристалл [52]:

$$\varphi(\Omega) = (k_e(\omega_p) - k_o(\omega_p))L + (k_e(\omega_1 + \Omega) + k_e(\omega_2 - \Omega))L. \quad (2.11)$$

Первое слагаемое в (2.11) не зависит от частотной отстройки от синхронизма Ω и может быть легко скомпенсировано введением соответствующего фазового сдвига между поляризационными компонентами накачки. Второе же слагаемое обусловлено частотной дисперсией и становится причиной появления различных фазовых сдвигов для различных частот внутри спектральной линии СПР. Физически это означает, что при выделении достаточно широкого участка спектра СПР его отдельные спектральные компоненты будут складываться с разными фазами, что эквивалентно потере когерентности и переходу к смешанному состоянию в представлении

куквартов. Чистое поляризационно-частотное состояние, будет существовать лишь в гильбертовом пространстве более высокой размерности $D \geq 4$. Для оценки этой размерности можно воспользоваться, например, критерием Федорова [20, 53], адаптированным к поляризационно-частотным распределениям, однако это задача выходит за пределы данной работы.

Рассмотрим влияние дисперсионных эффектов на свойства генерируемого поляризационного состояния. Поляризационную матрицу плотности, соответствующую состоянию $|\psi\rangle$, можно получить взяв частичный след по частотным переменным:

$$\rho_{\text{pol}} = \text{Tr}_{\Omega} |\psi\rangle \langle \psi| = \frac{1}{2} \sum_{p=\{H,V\}} \int d\Omega F(\Omega, p) F^*(\Omega, p) |p_1 p_2\rangle \langle p_1 p_2| \quad (2.12)$$

с очевидным обозначением $|p_1 p_2\rangle \equiv a_p^\dagger(\omega_1 + \Omega) a_p^\dagger(\omega_2 - \Omega) |\text{vac}\rangle$. В явном виде для поляризационной матрицы плотности получаем выражение:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{pol}} = & \frac{1}{2} (|H_1 H_2\rangle \langle H_1 H_2| + |V_1 V_2\rangle \langle V_1 V_2| + \\ & \int d\Omega |F(\Omega)|^2 e^{-i\varphi(\Omega)} |H_1 H_2\rangle \langle V_1 V_2| + \int d\Omega |F(\Omega)|^2 e^{i\varphi(\Omega)} |V_1 V_2\rangle \langle H_1 H_2|), \end{aligned} \quad (2.13)$$

соответствующее, вообще говоря, смешанному поляризационному состоянию. Чистое состояние может быть получено только в случае $\varphi(\Omega) = \text{const}$.

В первом порядке по малой расстройке Ω имеем:

$$\Delta_z(\Omega) = \left[\left(\frac{\partial k_o(\omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega_1} - \left(\frac{\partial k_o(\omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega_2} \right] \Omega = \left[\frac{1}{v_o^{gr}(\omega_1)} - \frac{1}{v_o^{gr}(\omega_2)} \right] \Omega = C_o \Omega, \quad (2.14)$$

$$\varphi(\Omega) = \left[\left(\frac{\partial k_e(\omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega_1} - \left(\frac{\partial k_e(\omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega_2} \right] L\Omega = \left[\frac{1}{v_e^{gr}(\omega_1)} - \frac{1}{v_e^{gr}(\omega_2)} \right] L\Omega = C_e L\Omega. \quad (2.15)$$

Здесь $v_{o,e}^{gr}(\omega) = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_{o,e}} \right)$ - групповая скорость волновых пакетов с соответствующими центральными частотами. Выражение (2.14) определяет фор-

му спектральной линии СПР: $|F(\Omega)|^2 = \text{sinc}^2(C_o L \Omega / 2)$. Нам будет удобнее рассмотреть временную картину и перейти от спектральных характеристик к временным корреляциям. Корреляционная функция второго порядка связана со спектром следующим образом [29]:

$$G^{(2)}(\tau) = \left| \int d\Omega F(\Omega) \cos(\Omega\tau) \right|^2. \quad (2.16)$$

В случае симметричной функции $F(\Omega)$ получаем обычное преобразование Фурье. Таким образом, в нашем случае корреляционные функции излучения от каждого из кристаллов будут иметь вид прямоугольников шириной $\tau_1 = C_o L$. Наличие сдвига фаз $\varphi(\Omega)$ на временном языке будет означать относительный сдвиг корреляционных функций на величину $\tau_2 = C_e L$ (см. Рис. 2.3).

Относительный сдвиг корреляционных функций излучения от первого и второго кристалла приводит к различимости рожденных в них пар фотонов по моменту их регистрации, и, следовательно, к уменьшению видности поляризационной интерференции.

Рассмотрим детально этот вопрос с экспериментальной точки зрения. Схема установки приведена на Рис. 2.4. В качестве накачки использовалось излучение гелий-кадмиевого лазера на длине волны 325 нм. Вертикальная поляризация выделялась из изначально неполяризованного излучения с помощью призмы Глана V, после чего она поворачивалась полуволновой пластинкой. Относительная фаза ϕ между поляризационными компонентами накачки вносилась с помощью двух кварцевых пластинок с вертикально ориентированными оптическими осями, эффективная толщина которых определялась углом их относительного наклона θ . Параметрическое рассеяние происходило в двух кристаллах ВВО толщиной 2 мм каждый, вырезанных для коллинеарного частотно-вырожденного синхро-

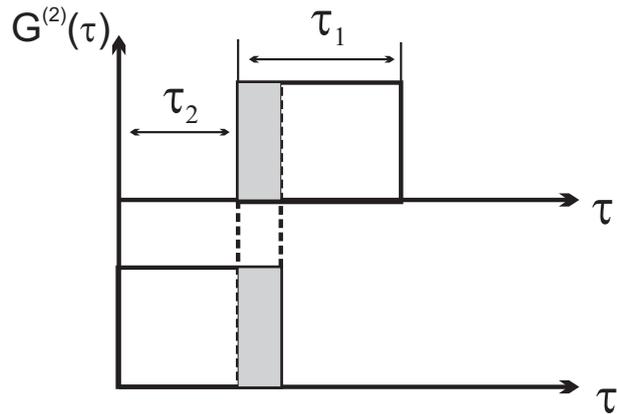


Рис. 2.3. Корреляционная функция второго порядка для СПР от двух ортогонально ориентированных кристаллов. Серым цветом выделены временные области, в которых корреляционные функции перекрываются, что приводит к интерференции.

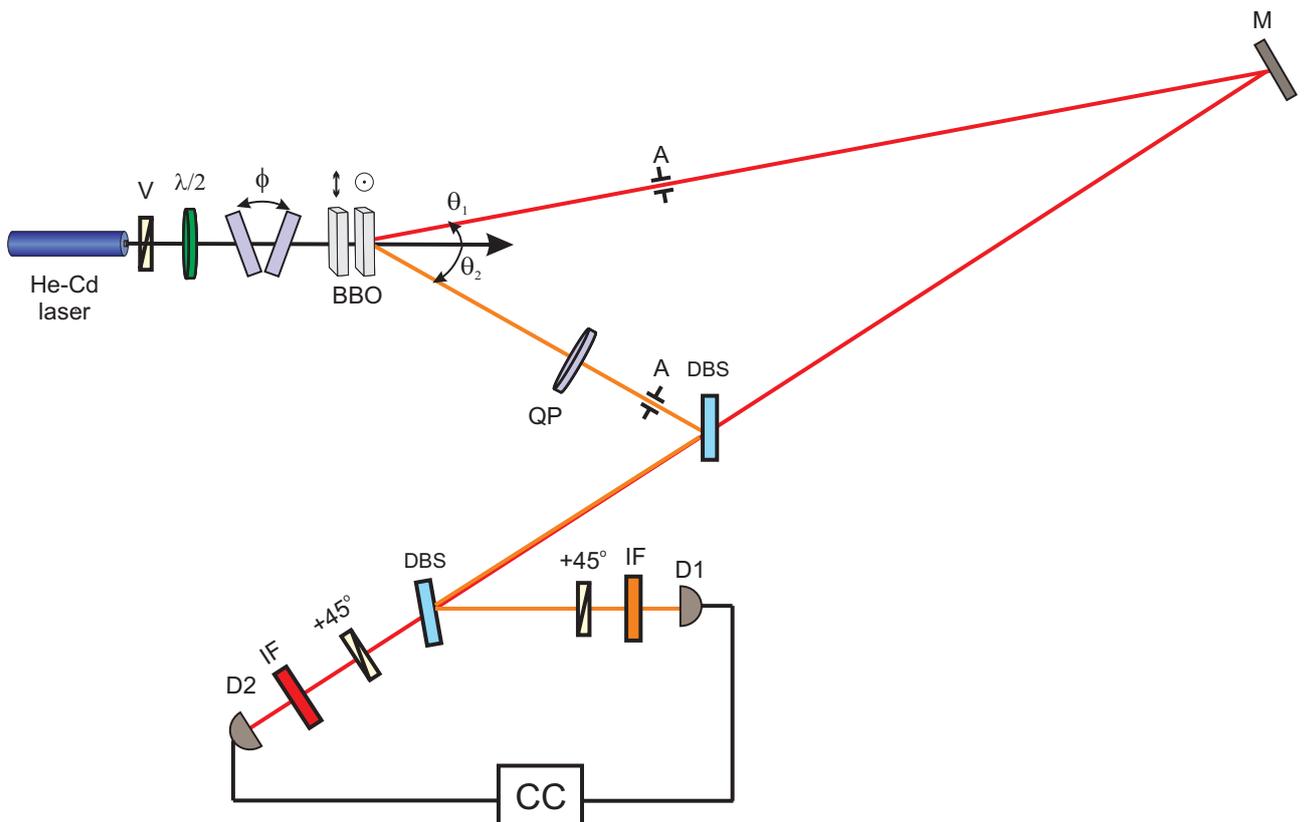


Рис. 2.4. Экспериментальная установка для приготовления перепутанных состояний.

низма. Направления, соответствующие рабочим длинам волн $\lambda_1 = 600$ нм и $\lambda_2 = 710$ нм, выделялись диафрагмами А, после чего пучки сбивались на дихроичном светоделителе, пропускающем излучение на длине волны 600 нм, и полностью отражающем на 710 нм. В измерительной части пары делились по частоте с помощью аналогичного светоделителя. В каждом из каналов измерительной схемы стояли пленочные поляризаторы, ориентированные под углом 45° к вертикали и интерференционные фильтры с центральными длинами волн 600 нм и 710 нм, соответственно, и с шириной полосы пропускания 10 нм. Совпадения фотоотсчетов детекторов D1 и D2 регистрировались с помощью схемы совпадений СС с окном 2 нс.

В идеальном случае, когда поляризационное состояние бифотона имеет вид

$$|\psi\rangle = 1/\sqrt{2} (|H_1H_2\rangle + e^{i\phi} |V_1V_2\rangle), \quad (2.17)$$

скорость счета совпадений в такой схеме оказывается

$$R_C \propto |\langle +45_1, +45_2 | (|H_1H_2\rangle + e^{i\phi} |V_1V_2\rangle) |^2 \propto 1 + \cos \phi, \quad (2.18)$$

где фаза ϕ изменяется с изменением наклона кварцевых пластинок в пучке накачки. В реальности, ввиду частичной различимости пар, рождающихся в первом и втором кристаллах, из-за неполного перекрытия соответствующих корреляционных функций (см. Рис. 2), видность интерференционной картины, определяемая как

$$V = \frac{R_{Cmax} - R_{Cmin}}{R_{Cmax} + R_{Cmin}}, \quad (2.19)$$

существенно отлична от 1. Используя выражение (2.13) для поляризационной матрицы плотности, для скорости счета совпадений можно получить

следующее выражение:

$$R(\phi) \propto 1 + 1 \int d\Omega |F(\Omega)|^2 \cos(\varphi(\Omega) - \phi) = \quad (2.20)$$

$$1 + V \cos(\phi),$$

где, в первом порядке по отстройке, видность интерференционной картины

$$V = \int d\Omega \text{sinc}^2\left(\frac{C_o L \Omega}{2}\right) \cos(C_e L \Omega). \quad (2.21)$$

Интеграл элементарно вычисляется и дает для видности выражение

$$V = 1 - \frac{C_e}{C_o} = 1 - \frac{\tau_2}{\tau_1}, \quad (2.22)$$

согласующееся с наглядными соображениями, проиллюстрированными рис. 2.3.

При фиксированном частотном спектре, определяемом в нашем случае полосой пропускания интерференционного фильтра (она оказывается чуть уже, чем ширина спектра СПР, составляющая в данном режиме около 12 нм), увеличить видность можно с помощью введения в пучок с меньшей длиной волны дополнительного двулучепреломляющего компенсатора QR. Кварцевый компенсатор с вертикально ориентированной оптической осью задерживает вертикально поляризованный фотон пары на время

$$\tau_{comp} = \left[\left(\frac{1}{v_e^{gr}(\omega_1)} - \frac{1}{v_o^{gr}(\omega_1)} \right) L_q \right], \quad (2.23)$$

где $v_{o(e)q}^{gr}$ - групповые скорости обыкновенной и необыкновенной волны в кварце, а L_q - длина компенсатора. Выбором длины компенсатора такой, чтобы $\tau_{comp} = \tau_2$, можно добиться полного перекрытия корреляционных функций, и следовательно максимальной видности интерференционной картины.

На рис. 2.5 представлена экспериментальная зависимость видности интерференционной картины от длины использованного кварцевого компенсатора. Пунктирная кривая «треугольной» формы, соответствует свертке

двух корреляционных функций прямоугольного вида, т.е. определяемых только формой спектральной линии СПР, без учета фильтрации. Однако, в эксперименте использовались интерференционные фильтры с зависимостью коэффициента пропускания от длины волны гауссовой формы с шириной, сравнимой с шириной спектра СПР. Таким образом в реальности, корреляционные функции должны иметь вид, несколько отличный от прямоугольного. Учет частотной фильтрации приводит к добавлению в выражение для амплитуды бифотона множителя, отвечающего амплитуде пропускания интерференционных фильтров. Выбирая его в виде гауссоиды, получаем

$$F(\Omega) \propto \exp\left(-\frac{(\omega_1 - \Omega)^2}{\Delta\omega^2}\right) \exp\left(-\frac{(\omega_2 - \Omega)^2}{\Delta\omega^2}\right) \text{sinc}\left(\frac{\Delta_z(\Omega)L}{2}\right), \quad (2.24)$$

где $\Delta\omega$ - ширина полосы пропускания фильтров. Сплошная кривая на рис. 2.5 соответствует численно рассчитанной зависимости видности от толщины компенсатора с учетом 10 нм интерференционных фильтров.

Расчет дает для ширины и сдвига корреляционных функций в нашем случае значения: $\tau_1 = 96$ фс, $\tau_2 = 87$ фс, что соответствует длине компенсатора 2.6 мм, в хорошем соответствии с экспериментальными данными. Небольшое отличие положения максимума видности в эксперименте (2.3 мм), от расчетного, скорее всего, объясняется неточностями в использованных значениях групповых скоростей. Примеры характерных интерференционных картин с компенсатором и без приведены на рис. 2.6.

Отличие видности от 100%, даже при использовании компенсатора нужной длины, объясняется двумя причинами. Первая связана с аналогичным фазовым множителем между компонентами состояния из первого и второго кристалла, возникающим из-за зависимости показателя преломления для необыкновенной волны от направления распространения. При конечный угловой размер диафрагм, выделяющих пространственные моды, эта

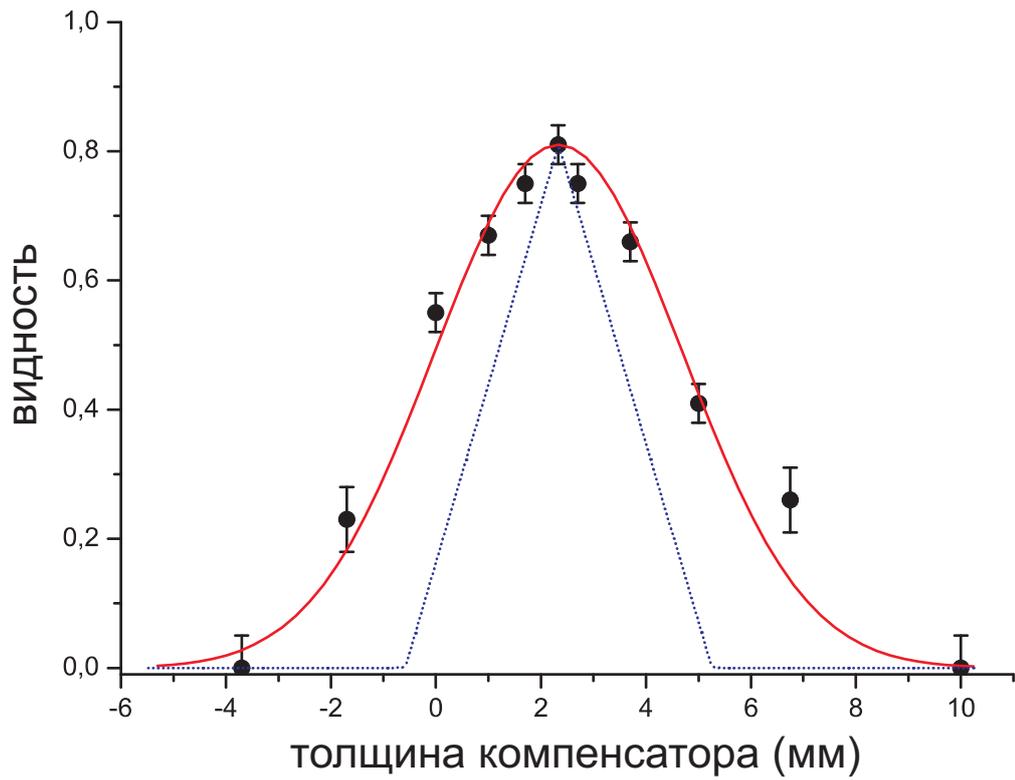


Рис. 2.5. Зависимость видности поляризационной интерференции от толщины компенсатора дисперсии групповых скоростей. Пунктирная кривая - теоретическая зависимость без учета фильтрации. Сплошная кривая - зависимость при учете частотной фильтрации с помощью 10 нм интерференционных фильтров в каждом канале.

«угловая дисперсия» также приводит к уменьшению чистоты состояния, как и частотная. Компенсация этого нежелательного эффекта возможна с помощью внесения неоднородной по пучку фазовой задержки¹. Подобная компенсация в частотно-вырожденном режиме была недавно реализована в работе [54].

Вторая причина - влияние квадратичных по расстройке частоты Ω членов в разложении $\varphi(\Omega)$, приводящих к неодинаковому уширению корреляционных функций, и следовательно не 100%-ой видности даже при идеальной компенсации линейной по расстройке части [52]. Действительно, во втором порядке по отстройке от вырожденной частоты имеем:

$$\varphi(\Omega) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial^2 k_e}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_1} + \left(\frac{\partial^2 k_e}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_2} \right) L\Omega^2 = B_e L\Omega^2. \quad (2.25)$$

Вводя обозначение $\xi = C_o L\Omega$ и $D = \frac{B_e}{C_o^2 L}$ для скорости счета совпадений при полной компенсации эффектов первого порядка получим:

$$R(\phi) \propto 1 + \frac{1}{2\pi} (V_c \cos \phi + V_s \sin \phi), \quad (2.26)$$

где $V_c = \int d\xi \text{sinc}^2 \frac{\xi}{2} \cos D\xi^2$ и $V_s = \int d\xi \text{sinc}^2 \frac{\xi}{2} \sin D\xi^2$. Для используемых в эксперименте кристаллов $D = 0.0193$ и численный расчет дает значение видности интерференционной картины

$$V = \frac{\sqrt{V_c^2 + V_s^2}}{2\pi} = 0.89. \quad (2.27)$$

Отметим, что такое низкое² значение видности является предельным случаем, соответствующим полному отсутствию частотной фильтрации. Результаты численного расчета зависимости видности при полной компенсации от ширины интерференционных фильтров приведены на Рис.2.7.

¹Например с помощью пространственного фазового модулятора света, подробно описанного в главе 3.

²Рекордные значения видности в экспериментах с узкополосными фильтрами и в частотно-вырожденном режиме составляют 99%.

Видно, что при использовании даже достаточно широких интерференционных фильтров ($< 30\text{нм}$), значения видности достигают 0.95 и выше.

Низкая видность поляризационной интерференции в обсуждаемом эксперименте соответствует плохому качеству приготовления перепутанных состояний. Полученные в настоящее время результаты статистического восстановления состояния

$$|\Phi^+\rangle = 1/\sqrt{2} (|H_1 H_2\rangle + |V_1, V_2\rangle), \quad (2.28)$$

соответствующего максимуму интерференционной картины на Рис. 2.6, дают значения меры соответствия *fidelity*

$$F = |\langle \psi_{theory} | \psi_{exp} \rangle|^2 \quad (2.29)$$

не более 75%. Тем не менее, мы не видим никаких принципиальных ограничений сверху на эту величину. Добиваться более высоких значений *fidelity* нужно путем компенсации угловой дисперсии, и возможно, использованием более узких частотных фильтров. Однако, само по себе наблюдение двухфотонной интерференции с ненулевой видностью говорит о том, что приготовление перепутанных состояний в предложенной схеме реалистично.

§ 2.3. Приготовление и томография смешанных состояний куквартов

Выше были рассмотрены задачи приготовления чистых поляризационных состояний в которых эффекты связанные с частотной дисперсией, приводящие к потере когерентности между различными поляризационными состояниями были нежелательны. Теперь мы обратимся к, в некотором

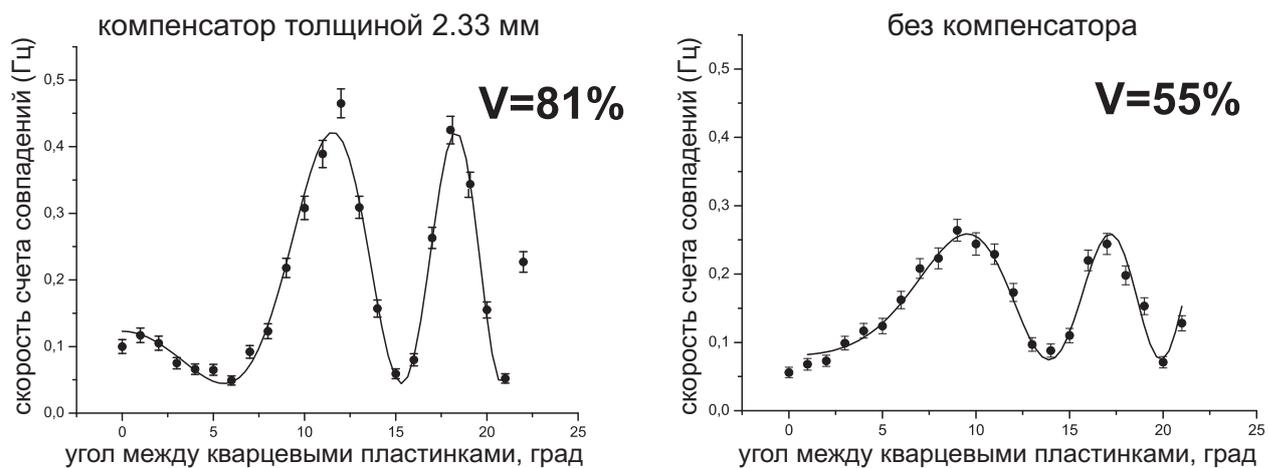


Рис. 2.6. Интерференционные картины, полученные без компенсатора и с компенсатором, толщиной 2.33 мм.

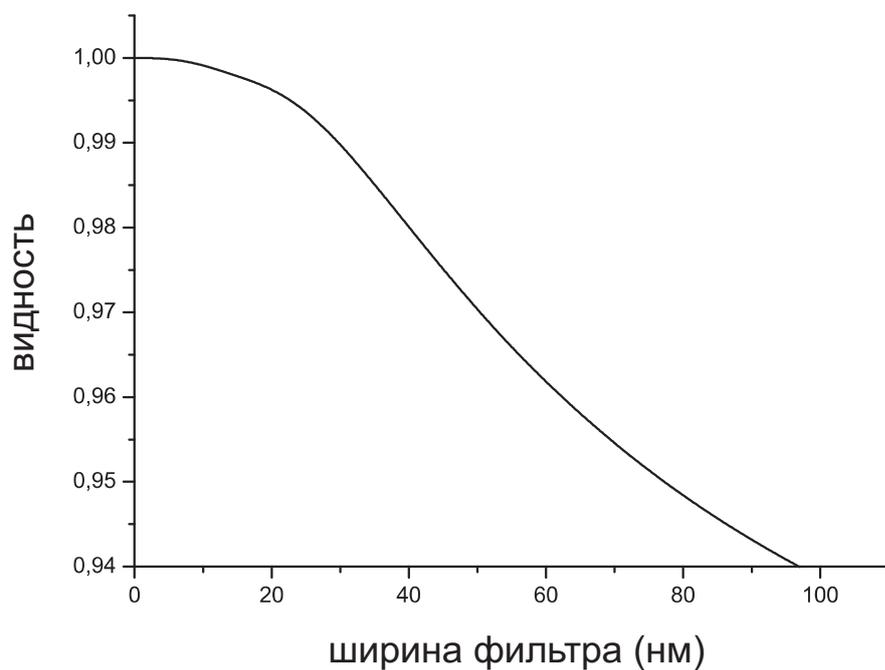


Рис. 2.7. Зависимость видности поляризационной интерференции от ширины полосы пропускания интерференционного фильтра при полной компенсации групповых задержек.

смысле, противоположной задаче приготовления и статистического восстановления смешанных состояний поляризационных кувартов. Нашей основной задачей в этой части работы была демонстрация возможности статистического восстановления состояний кувартов с различной степенью чистоты.

Как отмечалось выше, полный контроль над всеми компонентами матрицы плотности обеспечивает схема, использующая 4 нелинейных кристалла и компенсаторы групповых задержек для контроля когерентности, которая изображена на рис. 2.1. Она, в частности, позволяет приготовить полную четырехкомпонентную смесь

$$\rho = c_1 |H_1, H_2\rangle \langle H_1, H_2| + c_2 |H_1, V_2\rangle \langle H_1, V_2| + c_3 |V_1, H_2\rangle \langle V_1, H_2| + c_4 |V_1, V_2\rangle \langle V_1, V_2| \quad (2.30)$$

с максимальной энтропией $S = -\text{Tr} \rho \log_4 \rho = 1$, а также любое частично когерентное состояние с $0 \leq S \leq 1$. Для демонстрации мы ограничились схемой с двумя ортогонально ориентированными кристаллами типа I, в которой может быть получена только двухкомпонентная смесь вида

$$\rho = \left(1 - \frac{x}{2}\right) |\Psi_1\rangle \langle \Psi_1| + \frac{x}{2} |\Psi_2\rangle \langle \Psi_2| \quad (2.31)$$

с максимальной энтропией $S = 1/2$ при $x = 1/2$. В эксперименте использовался частотно-невырожденный режим, поэтому индексы 1 и 2 нумеруют частотные моды.

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 2.8. В качестве накачки использовалась вторая гармоника от титан-сапфирового лазера с центральной длиной волны 390 нм. Лазер работал в режиме синхронизации мод, продолжительность импульсов составляла порядка 100 фс. Использовались кристаллы ВВО длиной $L = 3$ мм, при этом задержка пар рождающихся в разных кристаллах, обусловленная дисперсией групповых

скоростей, $\tau = L/v_o^{gr}(\lambda_p) - L/v_e^{gr}(\lambda_s)$ составляет 1.3 пс, т.е. на порядок превосходит длину импульса. Таким образом, рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущем параграфе, приводят нас к выводу о том, что компоненты бифотонной пары, генерируемые в разных кристаллах будут в этом случае полностью некогерентны. Кристаллы вырезаны для коллинеарного частотно-невырожденного синхронизма, центральные длины волн сигнального и холостого фотонов составляли 832.5 нм и 740.8 нм. Поляризация накачки определяется полуволновой пластинкой нулевого порядка, установленной перед кристаллами. Если ось пластинки составляет угол $\phi/2$ с горизонталью, поляризационное состояние генерируемой пары может быть записано в виде:

$$\rho = \cos^2(\phi) |H_1, H_2\rangle \langle H_1, H_2| + \sin^2(\phi) |V_1, V_2\rangle \langle V_1, V_2|. \quad (2.32)$$

Полученное состояние диагонально в горизонтально-вертикальном базисе. Для преобразования к произвольной двух-компонентной смеси, обладающей, вообще говоря, ненулевыми недиагональными компонентами, можно воспользоваться процедурой, аналогичной рассмотренному выше преобразованию чистого состояния (2.4) к форме (2.3). В эксперименте для этого использовалась кварцевая пластинка WP нулевого порядка, полуволновая для длины волны 832.5 нм, действие которой на разных длинах волн $\lambda_{1,2}$ сводится к преобразованиям $|H_1\rangle \rightarrow \alpha |H_1\rangle + \beta |V_1\rangle$ и $|H_2\rangle \rightarrow \gamma |H_2\rangle + \delta |V_2\rangle$. При этом состояние (2.32) преобразуется в некоторое частично когерентное состояние вида (2.31).

Измерительная часть установки представляет собой схему поляризационной томографии, предложенную в [22], адаптированную к измерениям в частотно-невырожденном режиме. Фактически это интерферометр Брауна-Твисса с дихроичным светоделителем, разделяющим частотные мо-

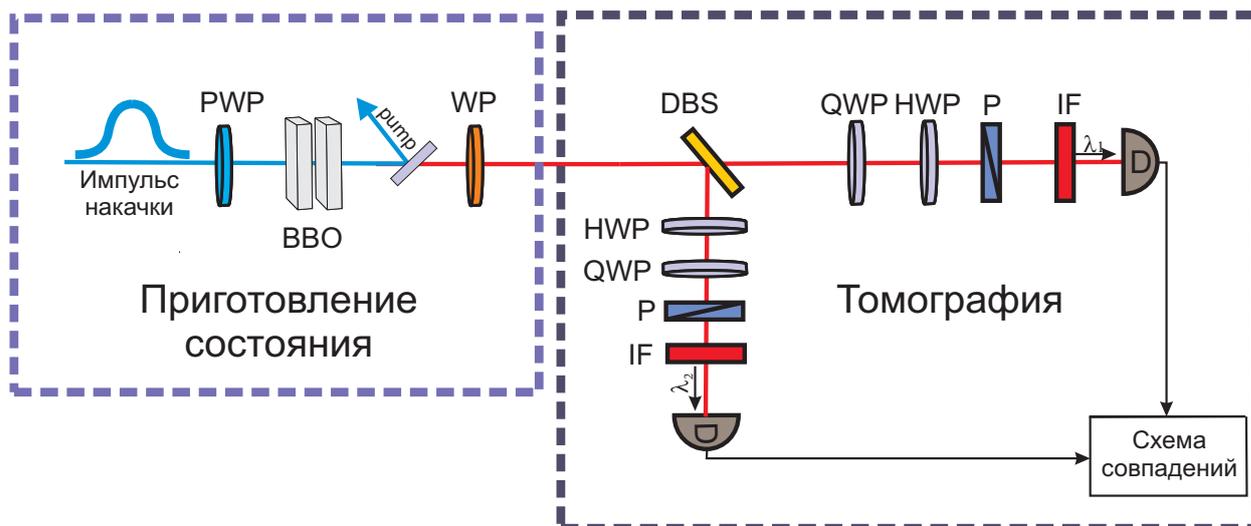


Рис. 2.8. Схема экспериментальной установки для приготовления и томографии смешанных состояний кварцов. BBO - два кристалла типа I с ортогонально ориентированными осями; PWP - полуволновая пластинка, задающая поляризацию накачки; WP - пластинка, преобразующая состояние; DBS - дихроичный светоделитель; QWP, HWP, P - четверть-, полуволновая пластинка и поляризатор, реализующие проекционное измерение; IF - 10 нм интерференционный фильтр; D - многомодовые волокна, подключенные к однофотонным детекторам.

ды. В каждом из плеч интерферометра последовательно установлены четвертьволновая пластинка (QWP), полуволновая пластинка (HWP) и вертикально ориентированный поляризатор. Такая схема позволяет осуществить проекцию на произвольное однофотонное поляризационное состояние. После поляризатора излучение проходит через интерференционные фильтры с шириной полосы пропускания 10 нм и фокусируется в многомодовое волокно, подключенное к однофотонным детекторам, представляющим собой лавинные фотодиоды. Сигнал с детекторов подается на схему совпадений с окном 5 нс.

Использованный протокол восстановления состояния или поляризационной томографии сводится к измерению проекций измеряемого состояния на набор из 16 состояний $|\psi_k\rangle = |\psi_{1k}\rangle |\psi_{2k}\rangle$ представленный в таблице 2.1. Соответствующие проекционные измерения описываются операторами $\mu_k = |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$, и средняя скорость счета совпадений в рассматриваемой схеме дается выражением

$$n_k = \mathcal{N} \langle \psi_k | \rho | \psi_k \rangle \quad (2.33)$$

с нормировочным множителем $\mathcal{N} = \sum_{k=1}^4 n_k$. Задача заключается в том, чтобы основываясь на измеренных значениях n_k , восстановить матрицу плотности ρ , удовлетворяющую естественным ограничениям: условие нормировки, положительная определенность и эрмитовость. Оказывается, что прямое обращение формулы (2.33) приводит, как правило, к матрицам, не удовлетворяющим этим требованиям. Поэтому необходимо решать статистическую задачу о нахождении матрицы из этого класса, наилучшим образом приближающей полученные данные. Такая матрица зависит от 16 действительных параметров: $\rho = \rho(t_1, \dots, t_{16})$. В предположении о пуассоновской статистике совпадений, вероятность получения набора результатов

$\{n_1, \dots, n_{16}\}$ определяется выражением

$$P(n_1, \dots, n_{16}) = \frac{1}{N_{norm}} \prod_{k=1}^{16} \exp \left(-\frac{(n_k - \langle n_k \rangle)^2}{\sqrt{\langle n_k \rangle}} \right), \quad (2.34)$$

с нормировочной константой N_{norm} и средними значениями $\langle n_k(t_1, \dots, t_{16}) \rangle = \mathcal{N} \langle \psi_k | \rho(t_1, \dots, t_{16}) | \psi_k \rangle$. Согласно статистическому методу максимального правдоподобия наилучшая оценка для матрицы плотности дается матрицей, максимизирующей эту вероятность для экспериментально полученных значений n_k , или, что тоже самое, минимизирующей функцию правдоподобия (логарифм P):

$$\mathcal{L}(t_1, \dots, t_{16}) = \sum_{k=1}^{16} \frac{(\mathcal{N} \langle \psi_k | \rho(t_1, \dots, t_{16}) | \psi_k \rangle - n_k)^2}{2\mathcal{N} \langle \psi_k | \rho(t_1, \dots, t_{16}) | \psi_k \rangle}. \quad (2.35)$$

Минимизация производилась численно методом градиентного спуска в пакете *Mathematica 6.0*. В качестве нулевого приближения использовались значения параметров $\{t_1^{(0)}, \dots, t_{16}^{(0)}\}$ определяемые из условия

$$\mathcal{N} \langle \psi_k | \rho^{(0)}(t_1^{(0)}, \dots, t_{16}^{(0)}) | \psi_k \rangle = n_k,$$

где на матрицу $\rho^{(0)}$ уже не накладывается никаких физических ограничений:

$$\rho^{(0)} = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{16} M^{(k)} n_k. \quad (2.36)$$

Матрицы $M^{(k)}$ можно найти в явном виде используя выражения для состояний $|\psi_k\rangle$ из таблицы 2.1. Ошибки в определении матрицы плотности определяются двумя причинами: статистическими флуктуациями количества отсчетов n_k и инструментальными погрешностями, например связанными с неточностями выставления пластинок. При не очень большой статистике ($\mathcal{N} \lesssim 10^4$) определяющий вклад вносит статистическая составляющая³.

³Заметим, что недавно вопрос об относительном вкладе статистических и инструментальных ошибок был подробно исследован в работе [55]

Пренебрегая вкладом инструментальных ошибок, можно получить следующее выражение для дисперсии матричных элементов [22]:

$$(\Delta\rho_{ij})^2 = \frac{1}{\mathcal{N}^2} \sum_{k=1}^{16} (M_{ij}^{(k)})^2 n_k. \quad (2.37)$$

Статистически восстановленная матрица плотности ρ_{exp} сравнивалась с ожидаемой для приготавливаемого состояния ρ_{th} , в качестве количественной меры близости использовалась величина *fidelity*, определяемая для смешанных состояний формулой Ульмана [37]: $F = \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho_{th}} \rho_{exp} \sqrt{\rho_{th}}}$.

Экспериментальные результаты

Была произведена томография нескольких представителей основных классов состояний, доступных для приготовления в рассматриваемой схеме: чистого, смешанных диагональных с разной степенью чистоты и смешанного с недиагональными компонентами. Поскольку точность восстановления состояния сильно зависит от точности соответствия тех состояний, на которые в реальности осуществляется проекция, представленным в таблице 2.1, экспериментальная процедура включала в себя «калибровку» установки. Измерялись параметры Стокса (т.е. производилась «томография» классического поляризационного состояния) для лазерных пучков с заведомо известной поляризацией. Это позволило вычислить матрицу дополнительного поляризационного преобразования вносимого различными элементами (в основном дихроичным светоделителем), которая впоследствии применялась для коррекции результатов томографии. Корректность этой процедуры подтверждается относительно равномерно высоким качеством восстановления, не зависящим от входного состояния.

Чистое состояние готовилось следующим образом. Состояние $|V_1, V_2\rangle$,

k	$ \psi_{1k}\rangle$	$ \psi_{2k}\rangle$	HWP1	QWP1	HWP2	QWP2
1	$ H\rangle$	$ H\rangle$	45°	0°	45°	0°
2	$ H\rangle$	$ V\rangle$	45°	0°	0°	0°
3	$ V\rangle$	$ V\rangle$	0°	0°	0°	0°
4	$ V\rangle$	$ H\rangle$	0°	0°	45°	0°
5	$ R\rangle$	$ H\rangle$	22.5°	0°	45°	0°
6	$ R\rangle$	$ V\rangle$	22.5°	0°	0°	0°
7	$ D\rangle$	$ V\rangle$	22.5°	45°	0°	0°
8	$ D\rangle$	$ H\rangle$	22.5°	45°	45°	0°
9	$ D\rangle$	$ R\rangle$	22.5°	45°	22.5°	0°
10	$ D\rangle$	$ D\rangle$	22.5°	45°	22.5°	45°
11	$ R\rangle$	$ D\rangle$	22.5°	0°	22.5°	45°
12	$ H\rangle$	$ D\rangle$	45°	0°	22.5°	45°
13	$ V\rangle$	$ D\rangle$	0°	0°	22.5°	45°
14	$ V\rangle$	$ L\rangle$	0°	0°	22.5°	90°
15	$ H\rangle$	$ L\rangle$	45°	0°	22.5°	90°
16	$ R\rangle$	$ L\rangle$	22.5°	0°	22.5°	90°

Таблица 2.1. Томографический протокол. Обозначения состояний: $|R\rangle = 1/\sqrt{2}(|H\rangle - i|V\rangle)$, $|L\rangle = 1/\sqrt{2}(|H\rangle + i|V\rangle)$, $|D\rangle = 1/\sqrt{2}(|H\rangle + |V\rangle)$. Соответствующие углы поворота оси пластинок относительно вертикали: HWP1,2 - полуволновых и QWP1,2 - четвертьволновых.

генерируемое горизонтально поляризованной накачкой преобразовывалось пластинкой WP с осью повернутой на 30° относительно вертикали. Матрица плотности такого состояния имеет вид:

$$\rho_{th}^{pure} = \begin{pmatrix} 0.5432 & 0.3136 + 0.1182i & 0.3136 & 0.1811 + 0.0683i \\ 0.3136 - 0.1182i & 0.2068 & 0.1811 - 0.0683i & 0.1194 \\ 0.3136 & 0.1811 + 0.0683i & 0.1811 & 0.1045 + 0.0394i \\ 0.1811 - 0.0683i & 0.1194 & 0.1045 - 0.0394i & 0.0689 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Для того, чтобы оценить объем статистики и соответствующую точность восстановления, приведем здесь непосредственные данные измерений. Время экспозиции в эксперименте составляло 180 с. Количество случайных совпадений за то же время и при тех же положениях томографических пластинок измерялось при большой электронной задержке сигнала от одного из детекторов (много большей окна схемы совпадений), эти «шумовые» значения вычитались из экспериментальных данных. Были получены следующие значения для количества «истинных» (за вычетом случайных) совпадений: $n_1 = 6118, n_2 = 1858, n_3 = 917, n_4 = 2943, n_5 = 1565, n_6 = 477, n_7 = 2362, n_8 = 7549, n_9 = 2395, n_{10} = 8254, n_{11} = 1664, n_{12} = 6653, n_{13} = 3078, n_{14} = 2739, n_{15} = 5817, n_{16} = 1398$.

На основании этих данных была восстановлена следующая матрица плотности:

$$\rho_{exp}^{pure} = \begin{pmatrix} 0.5138 & 0.2749 + 0.0523i & 0.3236 + 0.1308i & 0.1643 + 0.1026i \\ 0.2749 - 0.0523i & 0.1590 & 0.1887 + 0.0418i & 0.1004 + 0.0379i \\ 0.3236 - 0.1308i & 0.1887 - 0.0418i & 0.2463 & 0.1259 + 0.0224i \\ 0.1643 - 0.1026i & 0.1004 - 0.0379i & 0.1259 - 0.0224i & 0.0777 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Заметим, что эта матрица соответствует не вполне чистому состоянию, поскольку ее энтропия $S = 0.055 \pm 0.018$ отлична от нуля. Это небольшое отклонение, скорее всего объясняется неучтенной деполяризацией при от-

ражении от дихроичного светоделителя и других диэлектрических поверхностей. Сравнение с ρ_{th}^{pure} дает значение fidelity $F = 0.938 \pm 0.019$. Для наглядности действительные части ожидаемой и экспериментально восстановленной матриц представлены на рис. 2.9. Ошибка восстановления, оцененная согласно описанной выше процедуре, для данной матрицы дает:

$$\Delta\rho_{exp}^{pure} = \begin{pmatrix} 0.0066 & 0.0042 - 0.0034i & 0.0069 + 0.0023i & 0.0083 + 0.0028i \\ 0.0042 + 0.0034i & 0.0036 & 0.0056 - 0.0035i & 0.0039 + 0.0013i \\ 0.0069 - 0.0023i & 0.0056 + 0.0035i & 0.0046 & 0.0029 - 0.0024i \\ 0.0083 - 0.0028i & 0.0039 - 0.0013i & 0.0029 + 0.0024i & 0.0026 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Смешанное состояние с максимально возможной для данной схемы энтропией $S = 1/2$ имеет вид:

$$\rho_{th}^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Для его приготовления линейная поляризация накачки поворачивалась на 45° относительно горизонтали. Экспериментально восстановленная матрица плотности

$$\rho_{exp}^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 0.4584 & 0.0142 + 0.0048i & 0.0253 + 0.0162i & 0.0158 - 0.0097i \\ 0.0142 - 0.0048i & 0.0041 & 0.0012 + 0.0004i & -0.0406 + 0.0118i \\ 0.0253 - 0.0162i & 0.0012 - 0.0004i & 0.0031 & 0.0024 + 0.0029i \\ 0.0158 + 0.0097i & -0.0406 - 0.0118i & 0.0024 - 0.0029i & 0.5313 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

с ошибкой

$$\Delta\rho_{exp}^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 0.0078 & 0.0040 - 0.0039i & 0.0043 + 0.0036i & 0.0075 + 0.0047i \\ 0.0040 + 0.0039i & 0.0007 & 0.0047 - 0.0074i & 0.0038 + 0.0047i \\ 0.0043 - 0.0036i & 0.0047 + 0.0074i & 0.0006 & 0.0042 - 0.0042i \\ 0.0075 - 0.0047i & 0.0038 - 0.0047i & 0.0042 + 0.0042i & 0.0084 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

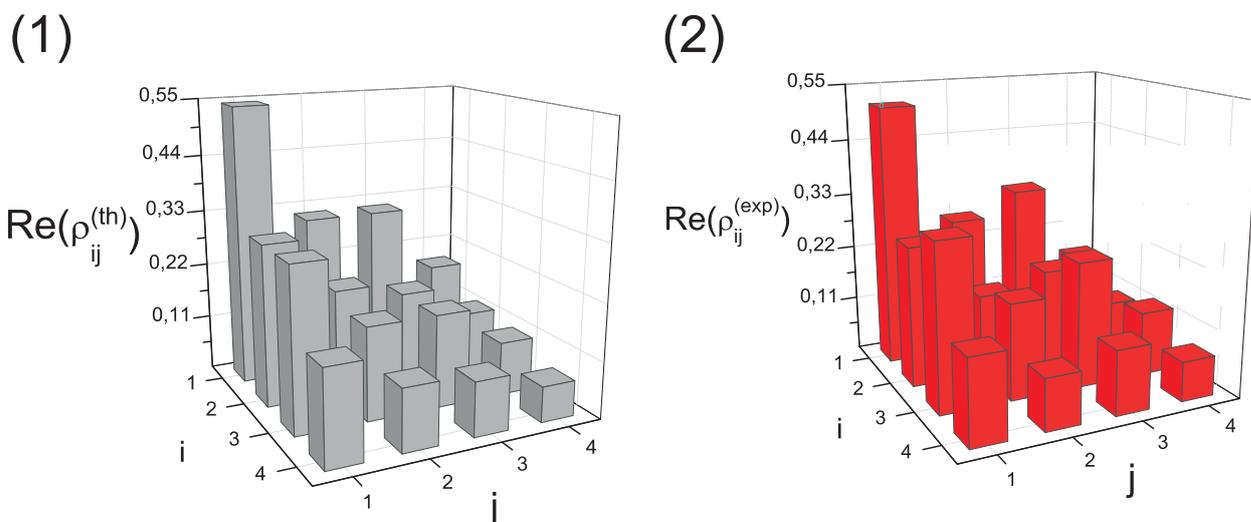


Рис. 2.9. Действительные части матриц плотности для чистого состояния: ожидаемой (1) и экспериментально восстановленной (2).

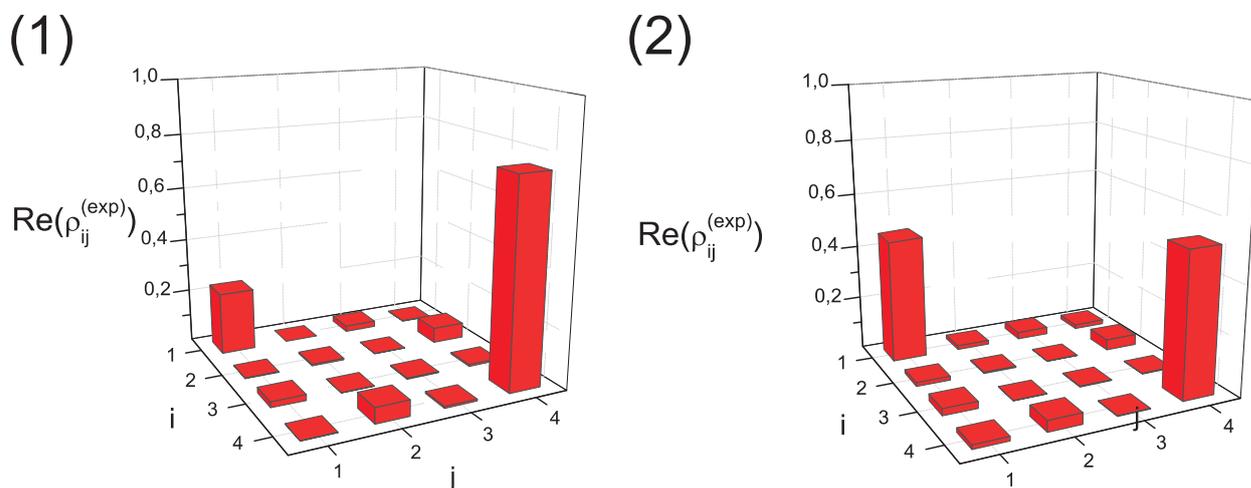


Рис. 2.10. Действительные части экспериментально восстановленных матриц плотности для состояний: $\rho_{11} = 0.25, \rho_{44} = 0.75$ (1) и $\rho_{11} = \rho_{44} = 0.5$ (2).

обладает энтропией $S = 0.510 \pm 0.016$ и совпадает с теоретической с fidelity $F = 0.989 \pm 0.016$.

В качестве представителя частично когерентных матриц плотности была выбрана следующая матрица с энтропией $S = 0.406$:

$$\rho_{th}^{(1/4)} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.75 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Для приготовления этого состояния поляризация накачки была ориентирована под углом в 30° к горизонтали. Экспериментальные данные приводят к следующим результатам для восстановленной матрицы и ошибки:

$$\rho_{exp}^{(1/4)} = \begin{pmatrix} 0.2300 & 0.0024 + 0.0009i & 0.0211 - 0.0007i & -0.0015 + 0.0020i \\ 0.0024 - 0.0009i & 0.0057 & -0.0006 + 0.0017i & -0.0572 - 0.0019i \\ 0.0211 + 0.0007i & -0.0006 - 0.0017i & 0.0041 & 0.0069 + 0.0018i \\ -0.0015 - 0.0020i & -0.0572 + 0.0019i & 0.0069 - 0.0018i & 0.7571 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

$$\rho_{th}^{(1/4)} = \begin{pmatrix} 0.0053 & 0.0027 - 0.0027i & 0.0030 + 0.0023i & 0.0071 + 0.0044i \\ 0.0027 + 0.0027i & 0.0008 & 0.0044 - 0.0070i & 0.0044 + 0.0053i \\ 0.0030 - 0.0023i & 0.0044 + 0.0070i & 0.0007 & 0.0048 - 0.0048i \\ 0.0071 - 0.0044i & 0.0044 - 0.0053i & 0.0048 + 0.0048i & 0.0096 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Для энтропии и fidelity получаем $S = 0.405 \pm 0.022$ и $F = 0.987 \pm 0.015$. Результаты графически представлены в виде диаграмм на рис. 2.10.

Наконец, состояние наиболее общего вида получалось для накачки, поляризованной под углом 45° к вертикали с дополнительным преобразованием пластинкой WP с оптической осью, ориентированной под углом 22.5° к вертикали. Это состояние с энтропией $S = 0.5$, матрица плотности кото-

рого выглядит следующим образом:

$$\rho_{th}^{trans} = \begin{pmatrix} 0.2500 & 0 & -0.0086 & 0.2414 + 0.0644i \\ 0 & 0.2500 & 0.2414 - 0.0644i & 0.0086 \\ -0.0086 & 0.2414 + 0.0644i & 0.2500 & 0 \\ 0.2414 - 0.0644i & 0.0086 & 0 & 0.2500 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Экспериментальные результаты приводят к матрицам:

$$\rho_{exp}^{trans} = \begin{pmatrix} 0.2493 & -0.0077 - 0.0007i & 0.0234 + 0.0126i & 0.1793 + 0.1665i \\ -0.0077 + 0.0007i & 0.2433 & 0.2032 + 0.1184i & 0.0142 - 0.0036i \\ 0.0234 - 0.0126i & 0.2032 - 0.1184i & 0.2590 & 0.0333 - 0.0019i \\ 0.1793 - 0.1665i & 0.0142 + 0.0036i & 0.0333 + 0.0019i & 0.2542 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

$$\Delta\rho_{exp}^{trans} = \begin{pmatrix} 0.0059 & 0.0042 - 0.0042i & 0.0046 + 0.0039i & 0.0098 + 0.0036i \\ 0.0042 + 0.0042i & 0.0059 & 0.0065 - 0.0054i & 0.0043 + 0.0040i \\ 0.0046 - 0.0039i & 0.0065 + 0.0054i & 0.0061 & 0.0042 - 0.0042i \\ 0.0098 - 0.0036i & 0.0043 - 0.0040i & 0.0042 + 0.0042i & 0.0059 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Энтропия и fidelity для этого состояния принимают значения $S = 0.550 \pm 0.003$ и $F = 0.878 \pm 0.029$. Результаты представлены для сравнения на рис. 2.11.

Можно отметить неплохое соответствие восстановленных состояний ожидаемым, находящее количественное выражение в высоких значениях F . Некоторое уменьшение fidelity для последнего состояния можно отнести на счет неточностей в установке угла оси пластинки WP с вертикалью, а также определения ее толщины. В целом, вклад в снижение fidelity вносит также деполяризация, неизбежная при отражении от диэлектрических поверхностей (в частности дихроичного светоделителя) под значительными углами, уменьшение которых затруднительно в силу конструктивных особенностей установки. Однако основным источником ошибок являются неточности в определении поляризационных преобразований при «калиб-

ровке» измерительной схемы. Эти проблемы могут быть устранены путем тщательного подбора поляризационно-чувствительной оптики.

§ 2.4. Заключение

Рассмотрены методы приготовления произвольных состояний поляризационных куквартов. Хотелось бы подчеркнуть, что предложенные методы позволяют приготавливать любое, наперед заданное состояние кукварта, что насколько нам известно, до сих пор не было реализовано. Рассматриваемые схемы используют бифотоны, невырожденные по частоте, в отличие от большинства известных автору предложений, основывающихся на использовании неколлинеарного режима СПР и пространственных мод. Предложенный подход имеет ряд преимуществ, основным среди которых является возможность формирования коллимированного пучка, что безусловно является желательным с точки зрения возможных практических применений. Предложены две экспериментальные схемы для приготовления произвольных состояний поляризационных куквартов. Одна из них позволяет приготовить произвольное чистое состояние кукварта с использованием только двух нелинейных кристаллов. Исследована возможность приготовления в предложенной схеме перепутанных состояний куквартов, получены экспериментальные результаты по двухфотонной интерференции и предложены методы улучшения ее видности, не требующие использования узкополосных частотных фильтров. Экспериментально реализована схема для приготовления и квантовой томографии смешанных состояний куквартов, позволяющая достичь высокого качества восстановления матриц плотности смешанных состояний. Продемонстрировано приготовление и томография смешанных состояний с различной энтропией, а также воз-

возможность преобразования состояний с диагональной матрицей плотности в состояния общего вида.

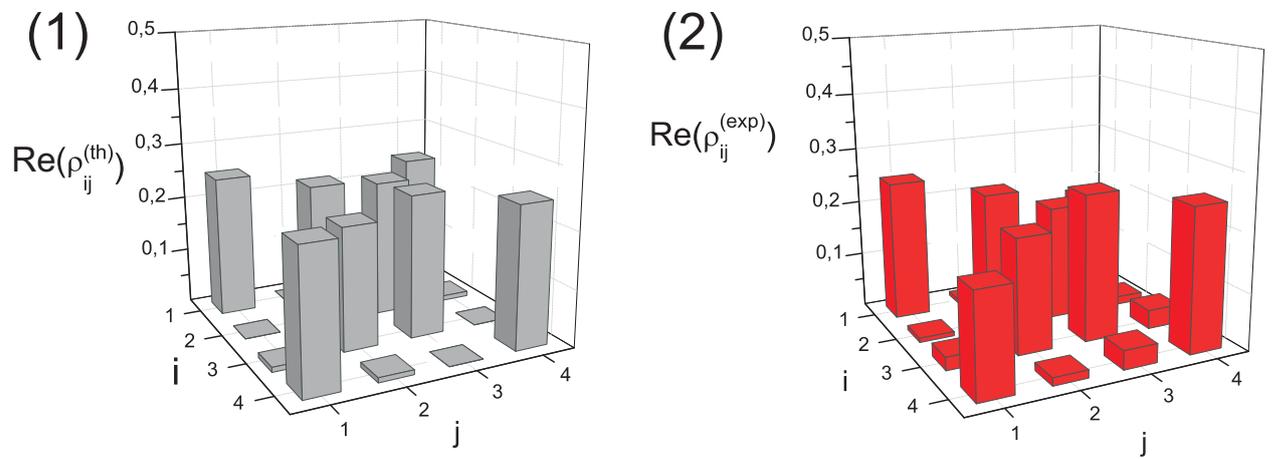


Рис. 2.11. Действительные части матриц плотности для преобразованного частично когерентного состояния: ожидаемой (1) и экспериментально восстановленной (2).

ГЛАВА 3

Пространственные моды Шмидта в угловом спектре бифотонного поля

Поляризационные степени свободы фотонов, которым посвящены предыдущие главы, в принципе позволяют реализовать кудиты сколь угодно большой размерности. На практике, однако, трудно приготовить чистые состояния с размерностью больше 4, т.к. эффективность генерации четырех и более коррелированных фотонов в процессе СПР ограничена низкими значениями нелинейностей высших порядков в существующих нелинейно-оптических материалах. В то же время, для таких применений как линейно-оптические квантовые вычисления или исследование квантовых случайных блужданий требуется возможность создания и измерения оптических кудитов с размерностью Гильбертова пространства порядка десятков и более. Естественным инструментом для решения этой задачи является использование степеней свободы фотона с изначально бесконечномерным пространством состояний, таких как частота или импульс. Эта глава посвящена исследованию корреляций в угловом спектре СПР и экспериментальному приготовлению и измерению состояний из дискретного базиса пространственных мод Шмидта.

§ 3.1. Угловой спектр СПР и пространственные корреляции фотонов

Бифотоны, рождающиеся в процессе СПР, обладают непрерывным частотно-угловым спектром. Рассмотрим его структуру более подробно. Феноменологическое описание СПР основывается на использовании эффективного гамильтониана взаимодействия [12]:

$$H = \int_V d^3\vec{r} \chi^{(2)}(\vec{r}) E_p^{(-)}(\vec{r}) E^{(+)}(\vec{r}) E^{(+)}(\vec{r}) + \text{H.c.} \quad (3.1)$$

Здесь E_p - поле накачки, предполагаемое классическим, E - оператор рассеянного поля. Рассмотрим случай монохроматической накачки. Расчет в первом порядке теории возмущений дает следующее выражение для состояния рассеянного поля:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |vac\rangle + \int d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \Psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) |1\rangle_{k_1} |1\rangle_{k_2}, \\ \Psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) &= \int_V d^3\vec{r} \chi^{(2)}(\vec{r}) E_p^{(-)}(\vec{r}) \exp[i\vec{\Delta}\vec{r}], \end{aligned} \quad (3.2)$$

здесь $\vec{\Delta} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_p$, $\omega_1 + \omega_2 = \omega_p$. Для случая коллинеарного синхронизма и широкого в поперечном направлении кристалла, можно получить следующее выражение для амплитуды бифотонного поля $\Psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$: [51, 56, 57]

$$\Psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \mathcal{E}_p(k_{1\perp} + k_{2\perp}) \mathcal{F}(k_{1\perp} - k_{2\perp}), \quad (3.3)$$

где $\mathcal{E}_p(k_{1\perp} + k_{2\perp})$ - угловой спектр накачки, а $\mathcal{F}(k_{1\perp} - k_{2\perp})$ - геометрический фактор, определяемый параметрами кристалла.

В работах [56, 57] получено выражение для \mathcal{F} не учитывающее эффекты, вызванные анизотропией кристалла:

$$\Psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \mathcal{N} \mathcal{E}_p(k_{1\perp} + k_{2\perp}) \text{sinc} \left[\frac{L(k_{1\perp} - k_{2\perp})^2}{4k_p} \right], \quad (3.4)$$

здесь L - длина кристалла. Такое выражение для амплитуды бифотона справедливо для случая слабо расходящейся накачки, более подробный анализ показывает, что в случае накачки с широким угловым спектром нужно учитывать зависимость показателя преломления для необыкновенной волны от направления распространения волны в кристалле. Этот вопрос был исследован в работах [20, 53], где показано, что для случая сильно расходящейся накачки экспериментальные результаты лучше описываются следующим выражением для амплитуды бифотона:

$$\Psi(\vec{k}_{1\perp}, \vec{k}_{2\perp}) \propto E_p^*(\vec{k}_{1\perp} + \vec{k}_{2\perp}) \times \times \text{sinc} \left\{ \frac{L}{2} \left[\frac{\omega}{c} (\vec{k}_{1\perp} + \vec{k}_{2\perp}) \cdot \frac{\partial n_p}{\partial \vec{k}_{p\perp}} + \frac{(\vec{k}_{1\perp} - \vec{k}_{2\perp})^2}{2k_p} \right] \right\}, \quad (3.5)$$

где значения k_p и $\frac{\partial n_p}{\partial \vec{k}_{p\perp}}$ берутся при $\vec{k}_{p\perp} = 0$.

Пространственные корреляции в угловом спектре СПР проявляются в существенном отличии ширин однофотонных и двухфотонных (условных) угловых распределений в схеме, приведенной на Рис. 3.1.

В установке используются два точечных детектора, установленные в дальней зоне (для наблюдения угловых распределений) объединенные схемой совпадений, один из детекторов фиксирован, другой имеет возможность перемещаться. Распределение единичных отсчетов сканируемого детектора соответствует безусловному одночастичному угловому распределению $dw^{uncond}/dk_{1,\perp x}$, а распределение совпадений отсчетов детекторов в такой схеме - условному распределению $dw^{cond}/dk_{1,\perp x}$, где $k_{1,\perp x}$ - проекция поперечной компоненты волнового вектора одного из фотонов на направление сканирования детектора. Изменяя ориентацию плоскости в которой перемещается сканируемый детектор можно исследовать также и двумерные распределения. Рассматриваемые распределения связаны с амплитудой бифотона следующим образом:

$$\frac{dw^{uncond}}{dk_{1,\perp x}} = \int dk_{2,\perp x} |\Psi(k_{1,\perp x}, k_{2,\perp x})|^2$$

$$\frac{dw^{cond}}{dx_1} = \frac{|\Psi(k_{1,\perp x}, k_{2,\perp})|^2}{\int dk_{1,\perp x} |\Psi(k_{1,\perp x}, k_{2,\perp x})|^2} \Big|_{k_{2,\perp x} = const}. \quad (3.6)$$

Если амплитуда бифотона представима в виде произведения двух множителей зависящих только от волновых векторов каждого из фотонов в отдельности, т.е. $\Psi(\vec{k}_{1,\perp}, \vec{k}_{2,\perp}) = \Psi_1(\vec{k}_{1,\perp}) \times \Psi_2(\vec{k}_{2,\perp})$, оба распределения совпадают. Если это неверно, и состояние является нефакторизованным (перепутанным), ширина условного распределения $\Delta k_1^{(c)}$ меньше чем ширина безусловного $\Delta k_1^{(s)}$. В работе [58] было предложено использовать отношение этих величин $R_k = \Delta k_1^{(s)} / \Delta k_1^{(c)}$ в качестве количественной меры угловых корреляций (в последствии эта величина получила название *отношения Федорова*). Экспериментальные исследования [20, 53] показали, что для СПР величина R_k может достигать очень больших ($R_k \sim 100$) значений, что свидетельствует о высокой степени перепутывания.

§ 3.2. Анализ перепутывания в угловом спектре с помощью разложения Шмидта

Наиболее распространенным подходом к анализу перепутывания для углового (и частотного) спектра СПР является использование разложения по когерентным модам. Фактически, этот подход основан на «дискретизации» пространства состояний фотонов соответствующим выбором базиса и переходу от непрерывного разложения по плоским волнам к дискретному разложению по функциям из выбранного базиса $\xi_i(\vec{k}_{1\perp, 2\perp})$. Для произвольного выбора разложения по модам для каждого из фотонов амплитуда

бифотона приобретает следующий вид:

$$\Psi(\vec{k}_{1\perp}, \vec{k}_{2\perp}) = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij} \xi_i(\vec{k}_{1\perp}) \xi_j(\vec{k}_{2\perp}). \quad (3.7)$$

Оказывается, что надлежащим выбором базиса можно привести выражение (3.7) к виду:

$$\Psi(\vec{k}_{1\perp}, \vec{k}_{2\perp}) = \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \psi_i(\vec{k}_{1\perp}) \psi_i(\vec{k}_{2\perp}) \quad (3.8)$$

называемому *разложением Шмидта*. Здесь базисные функции $\psi_i(\vec{k}_{1,\perp})$ - собственные функции одночастичной матрицы плотности $\rho_{1,2}(\vec{k}_{1,\perp}, \vec{k}_{1,\perp})$, а коэффициенты λ_i - соответствующие собственные значения, т.о. искомые моды могут быть найдены из интегрального уравнения вида:

$$\int \rho_{1,2}(\vec{k}_{\perp}, \vec{k}'_{\perp}) \psi_i(\vec{k}_{\perp}) d\vec{k}'_{\perp} = \lambda_i \psi_i(\vec{k}_{\perp}). \quad (3.9)$$

Легко заметить, что в разложении Шмидта для факторизованного состояния отличен от нуля только один коэффициент λ_0 . Для сильно перепутанного состояния напротив, коэффициенты λ_i убывают с ростом i медленно. В качестве меры перепутывания естественно использовать обобщение энтропии фон Неймана подсистем [59]:

$$E(|\Psi\rangle) = - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \log_2 \lambda_i. \quad (3.10)$$

Однако вычисление энтропии требует нахождения всех собственных значений в разложении Шмидта, что удается сделать аналитически в редчайших случаях, и представляет собой довольно сложную вычислительную задачу. Значительно удобнее использовать в качестве характеристики перепутывания «среднее число мод Шмидта», определяемое *числом Шмидта* [60]:

$$K = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i^2}, \quad (3.11)$$

которое также можно считать количественной характеристикой степени перепутывания в системе.

Анализ степени перепутанности состояния с волновой функцией (3.4) с помощью разложения Шмидта был проведен в работе [61]. Накачка полагалась гауссовой $\mathcal{E}_p = \exp\left[-\frac{|k_{1\perp} + k_{2\perp}|}{\sigma^2}\right]$. С помощью аппроксимации функции $\mathcal{F}(k_{1\perp} - k_{2\perp})$ из (3.4) гауссовой кривой, авторам удалось получить аналитическое выражение для параметра Шмидта:

$$K_g = \frac{1}{4} \left(b\sigma + \frac{1}{b\sigma} \right)^2, \quad (3.12)$$

где $b = \sqrt{\frac{L}{4k_p}}$ - ширина гауссоиды, моделирующей $\Delta(k_{1\perp} - k_{2\perp})$. В дальнейшем, мы будем называть эту процедуру «приближением двойной гауссоидой». Величина K_g определяется значением управляющего параметра $b\sigma$ и может достигать больших значений при $b\sigma \gg 1$ и $b\sigma \ll 1$. Численные расчеты, выполненные для $\Delta(k_{1\perp} - k_{2\perp}) = \text{sinc}\left[b(k_{1\perp} - k_{2\perp})^2\right]$, показали, что в этом случае $K > K_g$ для всех значений $b\sigma$. При небольших $b\sigma$ K также невелико (например, при $b\sigma = 0.25$, $K \approx 10.2$). Авторами был предложен способ увеличения числа Шмидта при фиксированных параметрах накачки и кристалла путем фильтрации мод. Оказалось, что число существенно отличных от нуля компонент в разложении Шмидта возрастает, если «отрезать» компоненты углового спектра с малыми k_{\perp} с помощью соответствующей маски. Например, убрав компоненты с $k_{1,2\perp} \leq 2\sigma$ для $b\sigma = 0.25$ получим $K \approx 17.2$, увеличение K выражено тем сильнее, чем менее перепутанным было состояние до фильтрации. Дальнейшее исследование влияния пространственной фильтрации мод на значение числа Шмидта было проведено в работе [62], где авторы исследуют влияние на него диафрагм и конечных апертур детектирования. Также в этой работе рассмотрен случай неколлинеарного синхронизма, в котором волновые

функции становятся анизотропными, но тем не менее допускают факторизацию.

§ 3.3. Структура пространственных мод Шмидта

Выбор базисного набора функций для разложения по когерентным модам (3.7) вообще говоря произволен и определяется удобством использования при анализе конкретной физической ситуации. Если рассматривается распространение рассеянного излучения в пространстве, удобно использовать в качестве базиса решения уравнения дифракции в параксиальном приближении, т.е. моды Гаусса-Лагерра или Гаусса-Эрмита. Более того, оказывается, что в хорошем приближении моды Гаусса-Эрмита являются модами Шмидта для СПР в случае гауссовой накачки с не слишком большой расходимостью.

п.3.3.1. Моды Гаусса-Лагерра и перепутывание по угловому моменту фотонов

Введем на плоскости поперечных компонент волновых векторов \vec{k}_\perp полярные координаты $\{k_\perp, \phi\}$. Моды Гаусса-Лагерра представляют собой функции следующего вида:

$$LG_{pl}(\vec{k}_\perp) \propto L_p^{|l|} \left(\frac{k_\perp^2}{(\Delta k_\perp)^2} \right) \exp \left(-\frac{k_\perp^2}{2(\Delta k_\perp)^2} \right) \times \exp \left(il\phi + i \left(p - \frac{|l|}{2} \right) \pi \right). \quad (3.13)$$

Здесь $L_p^{|l|}(x)$ - присоединенные полиномы Лагерра, Δk_\perp - угловая ширина моды. Радиальный индекс p определяет число нулей амплитуды в радиальном направлении, а азимутальный индекс l - набег фазы при обходе вокруг начала координат (так называемый «топологический заряд» пучка). Мож-

но показать, что пучки в моде Гаусса-Лагерра с ненулевым l обладают орбитальным угловым моментом [63, 64]. Это справедливо и для интересующего нас случая единичных фотонов: фотон в моде Гаусса-Лагерра имеет орбитальный угловой момент $l\hbar$.

В выбранном базисе разложение (3.7) принимает вид:

$$\Psi(k_{1\perp}^{\vec{)}, k_{2\perp}^{\vec{)}} = \sum_{l_1, p_1} \sum_{l_2, p_2} C_{p_1, p_2}^{l_1, l_2} LG_{p_1, l_1}(k_{1\perp}^{\vec{)}} LG_{p_2, l_2}(k_{2\perp}^{\vec{)}}. \quad (3.14)$$

В работах [65, 66] было показано, что орбитальный угловой момент сохраняется в процессе СПР, т.е. в подпространстве состояний с фиксированными индексами p_1 и p_2 выполняется равенство $l_0 = l_1 + l_2$, где l_0 - азимутальный индекс пучка накачки.¹ Этот закон сохранения приводит к тому, что фотоны в паре перепутаны по орбитальному угловому моменту, подобно тому, как закон сохранения поперечной компоненты импульса, обеспечиваемый условиями фазового синхронизма, приводит к пространственным корреляциям, рассмотренным в предыдущем параграфе. В подпространстве состояний бифотона с фиксированными значениями радиальных индексов разложение по модам Гаусса-Лагерра принимает форму разложения Шмидта:

$$\Psi(\vec{k}_{1\perp}, \vec{k}_{2\perp})_{p_1, p_2} = \sum_l C_{p_1, p_2}^{l, (l_0-l)} LG_{p_1, l}(k_{1\perp}^{\vec{)}} LG_{p_2, (l_0-l)}(k_{2\perp}^{\vec{)}}. \quad (3.15)$$

В работе [69] подробно рассмотрены свойства такого разложения и предложено использовать его ширину (названную авторами «*quantum spiral bandwidth*») для оценки степени перепутывания по орбитальному угловому

¹Строго говоря, сохранение орбитального углового момента при СПР в общем случае ставится под сомнение рядом авторов (см., например [67, 68]). Мы не будем останавливаться на этом вопросе подробно, тем более что практически все модели приводят к сохранению орбитального углового момента в интересных для нас близких к коллинеарному режимам, что многократно подтверждено экспериментально.

моменту. Заметим, что хотя эта величина действительно дает оценку размерности эффективного гильбертова пространства для состояний с орбитальным угловым моментом, она не полностью характеризует перепутывание в системе, поскольку определена только для фиксированных значений радиальных индексов. Избавиться от суммирования по второму радиальному индексу и полностью привести 3.15 к форме разложения Шмидта можно только в приближении двойной гауссоидой [61].

Экспериментальному приготовлению пар фотонов в состояниях с ненулевым орбитальным угловым моментом и исследованию перепутывания по орбитальному угловому моменту посвящено значительное число работ [70, 71, 72, 16, 73, 17, 74, 75, 76, 77, 78, 79]. Экспериментальное измерение *quantum spiral bandwidth* было произведено в работах [79, 78]. Ниже мы подробнее обсудим существующие экспериментальные методы.

п.3.3.2. Моды Гаусса-Эрмита как приближенные моды Шмидта бифотонного поля

Другим, не менее удобным, но менее используемым в литературе представлением является разложение углового спектра по модам Гаусса-Эрмита:

$$HG_{nm}(k_x, k_y) \propto H_n \left(\frac{k_x^2}{(\Delta k_x)^2} \right) H_m \left(\frac{k_y^2}{(\Delta k_y)^2} \right) \exp \left(-\frac{k_x^2 + k_y^2}{2(\Delta k_\perp)^2} \right), \quad (3.16)$$

где $H_n(x)$ - полиномы Эрмита, а $\{k_x, k_y\}$ - поперечные компоненты волнового вектора накачки. Его свойствам посвящена работа [80]. Авторы исследуют зависимость коэффициентов разложения от модовой структуры накачки (также выраженной в терминах разложения по модам Гаусса-Эрмита) а также зависимость весовых коэффициентов от соотношения между выбранной шириной гауссовой функции в (3.16) и шириной мо-

ды накачки. Сохраняющейся в процессе рассеяния величиной в данном случае является пространственная четность пучка: четность произведения $HG_{n_1 m_1}(k_1 x, k_1 y) \times HG_{n_2 m_2}(k_2 x, k_2 y)$ равна четности моды накачки.

Так же как и для разложения по модам Гаусса-Лагерра в (3.16) можно перейти к суммированию по одной паре индексов, т.е. привести его к виду разложения Шмидта, воспользовавшись приближением двойной гауссоиды [61, 81]. Рассмотрим случай небольшой расходимости накачки, для которого можно не учитывать линейное по углам рассеяния слагаемое в (3.5)². Хорошее приближение для малых σ дает замена $\text{sinc}(\frac{x^2}{\sigma^2}) \rightarrow \exp(-\gamma \frac{x^2}{\sigma^2})$, где коэффициент γ подбирается из условия «близости» обеих функций. Хорошее приближение дает критерий равенства вторых моментов, соответствующий значению коэффициента $\gamma = 0.86^3$. Тогда волновая функция (3.3) принимает вид:

$$\Psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \propto \exp\left(-\frac{(k_{1\perp} + k_{2\perp})^2}{2a^2}\right) \exp\left(-\frac{(k_{1\perp} - k_{2\perp})^2}{2b^2}\right), \quad (3.17)$$

где параметр a определяет ширину углового спектра накачки, а $b = \sqrt{4k_p/\gamma L}$ - ширину синхронизма в кристалле. Видно, что волновая функция представима в виде произведения множителей, зависящих только от компонент $k_{1,2x}$ и $k_{1,2y}$ по отдельности, потому достаточно рассмотреть одномерную задачу:

$$\Psi(k_{1x}, k_{2x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi ab}} \exp\left(-\frac{(k_{1x} + k_{2x})^2}{2a^2}\right) \exp\left(-\frac{(k_{1x} - k_{2x})^2}{2b^2}\right). \quad (3.18)$$

Можно показать, что решения уравнения (3.9) для такой волновой функ-

²Анизотропия распределений, вызываемая учетом этого слагаемого, несущественна при значениях расходимости накачки и длины кристалла, соответствующих эксперименту, поэтому мы пользуемся упрощенным выражением.

³Мы использовали несколько вариантов выбора значения коэффициента γ , например $\gamma = 0.249$ (вариант, использованный в работе [81]), соответствующий равенству ширин на полувысоте для рассматриваемых функций. Наилучшее приближение для экспериментально полученных распределений коэффициентов в разложении Шмидта дает критерий равенства вторых моментов ($\gamma = 0.86$)

ции имеют вид [81]:

$$\psi_n(k_{1x,2x}) = \left(\frac{2}{ab}\right)^{1/4} \phi_n\left(\sqrt{\frac{2}{ab}}k_{1x,2x}\right), \quad (3.19)$$

где $\phi_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} e^{-x^2/2} H_n(x)$. Для соответствующих собственных значений и числа Шмидта получаем:

$$\lambda_n = 4ab \frac{(a-b)^{2n}}{(a+b)^{2(n+1)}}, K = \frac{a^2 + b^2}{2ab}. \quad (3.20)$$

Таким образом, мы приходим к следующей форме разложения Шмидта для углового спектра СПР в приближении двойной гауссоиды:

$$\Psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \sum_{mn} \sqrt{\lambda_n \lambda_m} \psi_n(k_{1x}) \psi_m(k_{1y}) \times \psi_n(k_{2x}) \psi_m(k_{2y}). \quad (3.21)$$

Оценка полной степени перепутывания для такого двумерного волнового пакета дается числом Шмидта $K = K_x \times K_y = (a^2 + b^2)^2 / 4a^2 b^2$.

Заметим, что разложение (3.21) - не единственная возможная форма разложения Шмидта. Например, как отмечалось выше, оно может быть получено и в виде разложения по модам Гаусса-Лагерра, что было сделано в работах [61, 82]. При этом, естественно, значение числа Шмидта не зависит от выбора базиса. Фактически, отличие между этими двумя представлениями соответствует просто выбору полярной или декартовой системы координат на плоскости поперечных компонент волновых векторов.

§ 3.4. Экспериментальные методы преобразования пространственных мод

Экспериментальное изучение свойств углового спектра параметрического рассеяния и использование пространственных степеней свободы фотонов в протоколах квантовой информации требуют разработки методов

приготовления состояний фотонов, описываемых модами высших порядков, и реализации проекционных измерений в базисе из этих мод. Методы преобразования мод хорошо развиты для классических лазерных пучков. За последнее десятилетие многие из них были перенесены на однофотонный уровень и использованы как в фундаментальных исследованиях, так и для решения прикладных задач. Этот параграф посвящен краткому обзору существующих методик, некоторые из которых используются в оригинальном исследовании.

Существует несколько подходов, позволяющих преобразовать гауссов пучок в одну из мод Гаусса-Лагерра или Гаусса-Эрмита. Общей идеей для них является внесение неоднородной по сечению пучка разности фаз, соответствующей нужной моде [83, 84, 85]. Для этого в пучок вносится фазовая маска или голограмма, при дифракции на которой, пучок приобретает необходимую фазовую структуру. Примеры фазовых масок, соответствующих некоторым из мод Гаусса-Эрмита и Гаусса-Лагерра, приведены на Рис. 3.2. Обычно такие маски комбинируют с концентрирующей фазовой дифракционной решеткой, «подсвечивающей» первый порядок дифракции, чтобы избавиться от искажений, вызванных недифрагированными компонентами. С помощью таких комбинированных фазовых масок возможно эффективное получение пучков достаточно высоких порядков [86].

В настоящее время большое распространение в качестве фазовых элементов для преобразования пучков получили активные фазовые модуляторы света на основе жидкокристаллических матриц (SLM). Как правило, используются матрицы на основе параллельно-ориентированных нематических жидких кристаллов (VAN-матрицы) на кремниевой подложке (LCoS). Каждая ЖК-ячейка такого устройства (пиксел) работает как двулучепре-

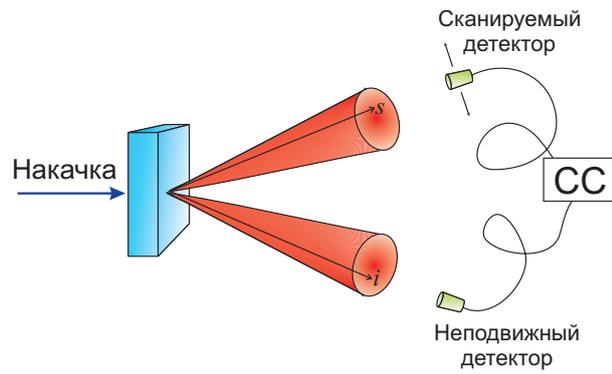


Рис. 3.1. Простейшая схема эксперимента по наблюдению корреляций в угловом спектре СПР.

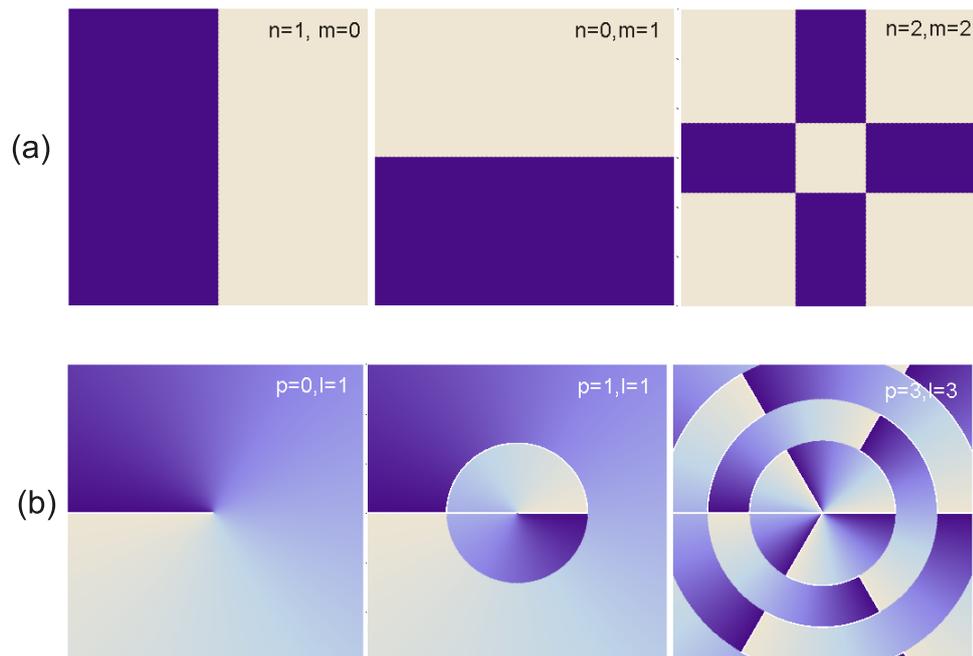


Рис. 3.2. Фазовые маски, преобразующие гауссов пучок в моды Гаусса-Эрмита HG_{nm} (a) и Гаусса-Лагерра LG_{pl} (b). Градация цвета от серого до синего соответствует изменению фазы от 0 до π .

ломляющая фазовая пластинка переменной толщины, внося фазовую задержку для поляризационной компоненты параллельной плоскости ориентации жидких кристаллов. Вносимая задержка зависит от ориентации кристаллов в плоскости и определяется приложенным к ячейке напряжением. Размеры отдельных пикселей в современных фазовых модуляторах порядка 10 микрон. С помощью таких устройств удастся получить пучки высокого качества в модах высших порядков [87].

Применяя технику преобразования классических пучков к единичным фотонам можно реализовать как преобразования, так и измерения в базисах пространственных мод. Схема экспериментальной установки реализующей проекционные измерения приведена на Рис. 3.3. Ключевым элементом схемы является одномодовое оптическое волокно, в котором может распространяться только основная гауссова мода, т.е. HG_{00} или LG_{00} в обозначениях предыдущего параграфа. Эта мода оптически сопрягается с гауссовой модой входного пучка. Проекция на пучки высших порядков осуществляются с помощью фазовой маски, которая преобразует соответствующую ей моду в гауссову. Таким образом из всего модового состава пучка в волокно «заходит» только мода, соответствующая установленной маске, т.е. фотоотсчет детектора установленного после волокна соответствует детектированию фотона в выбранной моде, что и реализует проекционное измерение.

Одной из первых работ, посвященных экспериментальному приготовлению единичных фотонов в состояниях с орбитальным угловым моментом, была работа [71]. В качестве (квази)однофотонного источника использовалось излучение He-Ne лазера, ослабленное до < 0.3 нВт. В подготовительной части установки использовались фазовые голограммы, а измерения углового момента проводились предложенным авторами интерферометри-

ческим методом.

Полностью описанная выше схема проекционных измерений была впервые реализована в работе группы Цайлингера [70], в которой впервые было экспериментально продемонстрировано препутывание фотонов по орбитальному угловому моменту. Авторы использовали пары фотонов, рождавшиеся в процессе СПР в неколлинеарном режиме. Помещая в оба пучка фазовые голограммы, они наблюдали корреляции по угловому моменту, проявлявшиеся в отсутствии совпадений в случае, когда установленные маски соответствовали ортогональным модам, и максимальное количество совпадений для одинаковых масок при гауссовом пучке накачки. Если пучок накачки сам обладал орбитальным угловым моментом, максимум совпадений наблюдался для масок, соответствующих модам, азимутальные индексы которых удовлетворяли соотношению $l_1 + l_2 = l_p$, в полном соответствии с законом сохранения орбитального углового момента при СПР. В дальнейшем авторы использовали разработанные методы для приготовления оптических кутритов и реализации на их основе протокола квантового распределения ключа [16, 73]. Использованию SLM для приготовления и измерения пространственных кудитов на основе состояний с орбитальным угловым моментом посвящена работа [88].

Работы группы Бойда [79, 89] посвящены изучению корреляций сопряженных переменных азимутальный угол – орбитальный угловой момент. Для проекции на состояния, соответствующие определенному значению азимутального угла использовались маски в виде угловой щели, а для состояний с определенным угловым моментом – фазовые маски. Также авторами с помощью непосредственных измерений была определена ширина распределения по азимутальному индексу l (spiral bandwidth) для СПР. Квантовая томография состояний с орбитальным угловым моментом ре-

ализована в работе [90]. Авторы использовали состояния со значениями вплоть до $l \lesssim 30$, но ограничивались только четырехмерными подпространствами, натянутыми на базисные векторы $|-l, -l\rangle, |-l, l\rangle, |l, -l\rangle, |l, l\rangle$. Произвольные квантовые состояния из подпространства с $l = \pm 2$ удалось приготовить тем же авторам, используя маски, соответствующие суперпозициям мод Гаусса-Лагерра и Гаусса-Эрмита [76].

Отдельно следует отметить работу [78], в которой была с высокой точностью измерена величина spiral bandwidth с помощью косвенных методов. Данные о коэффициентах в разложении по модам Гаусса-Лагерра получались с помощью преобразования Фурье зависимости видности интерференции типа Хонга-Оу-Манделя от угла поворота одного из интерферирующих пучков вокруг своей оси.

§ 3.5. Реализация проекционных измерений в базисе мод Шмидта

Основной задачей, решаемой нами в этой части работы, была экспериментальная демонстрация возможности осуществления проекционных измерений в базисе пространственных мод Шмидта в бифотонном поле. В отличие от предыдущих работ, нами был выбран базис мод Гаусса-Эрмита. Такой выбор продиктован с одной стороны простым видом преобразующих моды фазовых транспарантов (Рис. 3.2 (а)). С другой стороны, симметричность распределения по модам относительно индексов m и n делает такой выбор удобным для изучения двумерной структуры распределения по модам, необходимой для полной характеристики перепутывания в системе. Напомним, что в экспериментах с модами Гаусса-Лагерра, насколько нам известно, до сих пор ограничивались лишь модами с различными

азимутальными индексами, т.е. выбиралось либо какое-то фиксированное значение радиального индекса, либо суммировался вклад от всех мод с различными значениями радиального индекса. Была поставлена задача об измерении распределения по модам Шмидта посредством прямых проекционных измерений, которая, насколько нам известно, до настоящего времени не была полностью решена экспериментально.

Прежде всего, нас интересовал вопрос о применимости приближения двойной гауссоиды для описания реальной экспериментальной ситуации. Мы использовали кристалл ВВО типа I длиной 2 мм, накачкой служило излучение непрерывного гелий-кадмиевого лазера на длине волны $\lambda_p = 325$ нм. Угловая ширина синхронизма в частотно-вырожденном режиме (для оценки - в пренебрежении расходимостью накачки) для такого кристалла - параметр b в формуле (3.17) составляет $b = 0.037$ рад. Для наших целей удобно подобрать расходимость накачки таким образом, чтобы число Шмидта было не очень большим. Поэтому мы фокусировали накачку на кристалл с помощью кварцевой линзы с фокусным расстоянием 150 мм. Измеренное значение расходимости накачки - параметр a в формуле (3.17) $a = (5.8 \pm 0.1)$ мрад⁴. Мы произвели численный расчет собственных значений и собственных функций для матрицы плотности, соответствующей точной волновой функции (3.5). Расчет производился следующим образом: в качестве базиса были выбраны моды Гаусса-Эрмита, соответствующие модам Шмидта для приближенной волновой функции (3.18). Мы ограничились набором из 10 низших мод (что обеспечивает вычисление числа Шмидта с точностью до третьего десятичного знака). Вычислялись мат-

⁴Нужно учитывать, что все формулы предыдущего параграфа записаны без учета изменения углов при преломлении на границе кристалла, поэтому при сравнении с экспериментом соответствующие угловые величины для накачки нужно делить, а для сигнала СПР умножать на коэффициент преломления $n_e(\lambda_p) = n_o(\lambda_s) = 1.667$.

ричные элементы матрицы плотности в этом базисе, после чего находились ее собственные значения и собственные функции. Результаты расчета в сравнении с приближенными модами Гаусса-Эрмита приведены на рис. 3.4. Можно констатировать неплохое соответствие приближенных мод реальным, во всяком случае, можно ожидать, что фазовые голограммы, соответствующие этим модам, будут близки к таковым для мод Гаусса-Эрмита. Отметим, что для размера перетяжки⁵ в фокальной плоскости линзы было экспериментально получено значение $w_p = (25 \pm 1)$ мкм, что соответствует параметру качества пучка $M^2 = 1.4$. Таким образом, пучок накачки не вполне гауссов, и на вопрос о том, будут ли моды Шмидта для такой системы действительно близки к модам Гаусса-Эрмита, можно ответить только экспериментально.

Для преобразования мод использовался пространственный фазовый модулятор (SLM) с жидкокристаллической матрицей на основе параллельно-ориентированных нематических жидких кристаллов (VAN-матрицы) на кремниевой подложке изготовленный фирмой Cambridge Correlators. Матрица состоит из 1280x720 пикселей размером около 10 мкм каждый и работает на отражение. Используемый SLM представляет собой 8 битное устройство, т.е. напряжение на ЖК ячейке кодируется 8 двоичными разрядами. Согласно данным производителя и проведенной нами калибровке SLM вносит фазу от 0 до 0.8π . Для того чтобы получить необходимый нам фазовый сдвиг π , мы использовали двойное отражение от SLM. Матрица работает как фазовый модулятор только для определенного направления линейной поляризации, которое для нашего устройства составляет 42° с вертикалью. При этом углы падения невозможно сделать очень малыми из-за геометри-

⁵Здесь и далее под "размером перетяжки" мы будем понимать параметр w , стоящий в показателе экспоненты в зависимости интенсивности от расстояния до центра пучка: $I(r) = I_0 e^{-\frac{r^2}{w^2}}$.

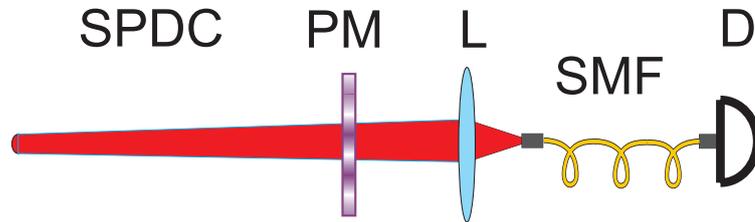


Рис. 3.3. Схема проекционных измерений в базисе пространственных мод. PM - фазовая маска, SMF - одномодовое оптическое волокно, L - объектив, сопрягающий моду волокна с гауссовой модой входного пучка.

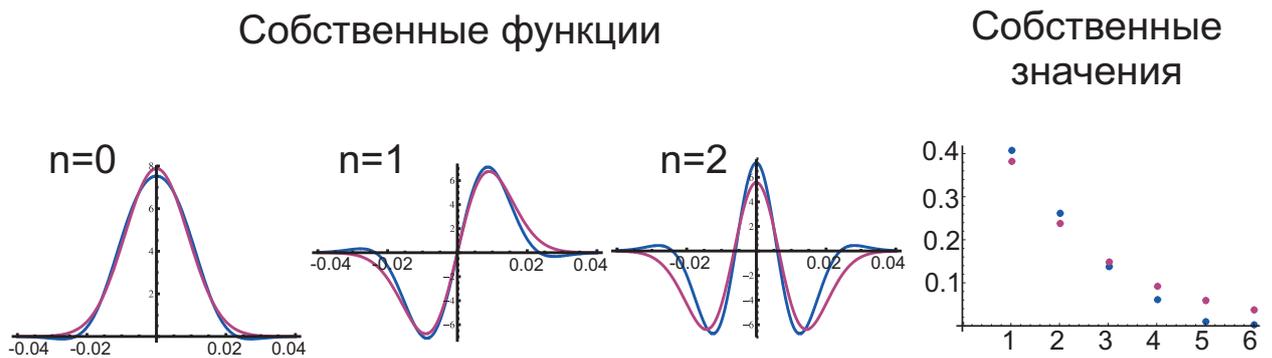


Рис. 3.4. Численно рассчитанные моды Шмидта в сравнении с модами Гаусса-Эрмита и соответствующие собственные значения.

ческих ограничений, связанных с большими размерами падающих пучков, что приводит к нежелательным поляризационным эффектам при отражении от установленного параллельно модулятору диэлектрического зеркала (см. рис. 3.5). Для минимизации этих эффектов непосредственно перед и после модулятора были установлены поляризаторы, ориентированные в рабочем направлении устройства. Также важно, что техническое ограничение на возможную фазовую задержку вынудило нас работать в нулевом порядке дифракции, поскольку фазовая решетка, «подсвечивающая» первый порядок, должна вносить сдвиг фаз 2π на период решетки, что возможно только при тройном отражении.

Для демонстрации возможности качественного преобразования пространственных мод с помощью данного устройства мы использовали экспериментальную схему, изображенную на рис. 3.5. Источником служило ослабленное излучение полупроводникового лазера с длиной волны генерации 650 нм. Лазерный пучок пропусклся через одномодовое оптическое волокно и фокусировался объективом для микроскопа кратностью увеличения 20X таким образом, чтобы расходимость получаемого пучка соответствовала угловой ширине нулевой моды Шмидта на рис. 3.4, а положение перетяжки соответствовала будущему местоположению нелинейного кристалла. Таким образом, мы получали строго одномодовое излучение с параметрами гауссова пучка совпадающими с ожидаемыми для мод Шмидта. Пучок коллимировался с помощью 145 мм линзы и после двойного отражения от фазового модулятора фокусировался в подключенное к детектору одномодовое волокно 8X кратным объективом для микроскопа. При этом размер перетяжки пучка совпадал с размером фундаментальной моды волокна (4.6 мкм). Заметим, что фокусное расстояние линзы подбиралось именно из условия сопряжения мод и однозначно соответствует угловой ширине нуле-

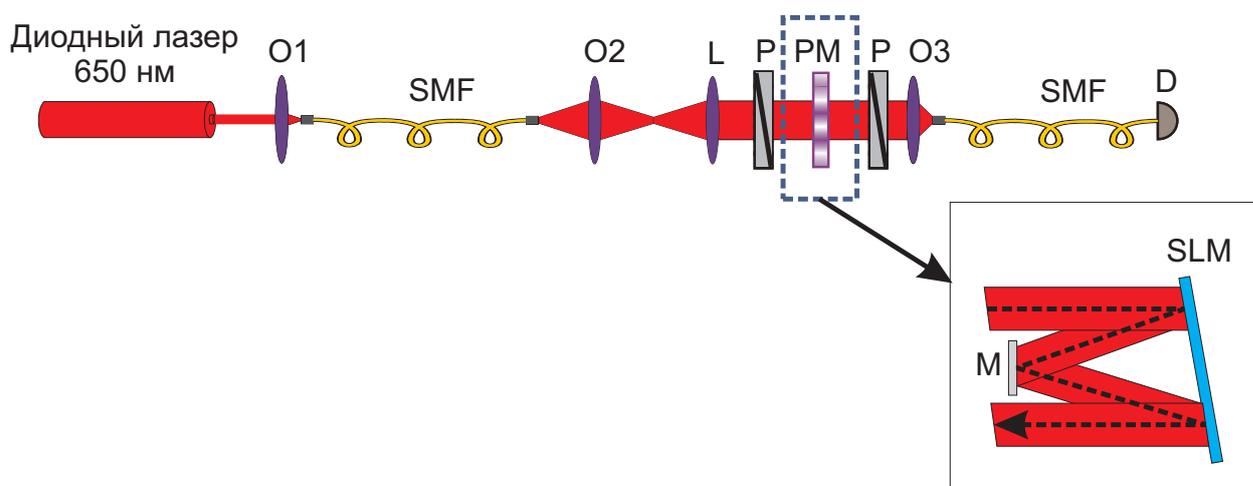


Рис. 3.5. Схема установки для преобразования лазерного пучка в моды Гаусса-Эрмита. SMF- одномодовое волокно; O1,2,3 - микрообъективы; L - линза с $F = 145$ мм; P - поляризаторы; D - однофотонный детектор с волоконным входом. Пространственный фазовый модулятор изображен для простоты в виде маски PM, в реальности это система из SLM и диэлектрического зеркала M, работающая на отражение (см. подробности в тексте).

вой моды Шмидта. На фазовом модуляторе отображались маски, соответствующие модам Гаусса-Эрмита (см. рис. 3.2). Положение скачка фазы для мод TE_{10} и TE_{01} , которое должно в точности соответствовать центру пучка, подбиралось из условия минимума скорости счета детектора, т.е. из условия ортогональности моды, получаемой в результате преобразования, фундаментальной TE_{00} моде волокна. Аналогично подбиралось расстояние между фазовыми скачками, соответствующими нулям мод TE_{20} и TE_{02} . Эти два параметра однозначно определяли положение и форму фазовых масок для всех остальных мод. Если определить «видность» наблюдаемой картины как отношение скорости счета детектора для моды TE_{mn} к скорости счета для непреобразованного гауссова пучка TE_{00} : $V = (R_{00} - R_{mn}) / (R_{00} + R_{mn})$, то практически для всех мод с $0 \leq m, n \leq 4$ мы получили значения превышающие 97%, что свидетельствует о высоком качестве осуществления преобразования даже в нулевом порядке дифракции. Исключение составляют моды TE_{01} и TE_{11} , для которых полученная видность не превосходит 90%. Мы относим этот факт на счет худшей юстировки оптических элементов (в особенности объективов) вдоль вертикальной оси, что объясняется исключительно конструктивными особенностями микрометрических подвижек, на которых установлены эти элементы. Гистограмма скорости счета детектора для различных мод приведена на рис. 3.6.

Чтобы выяснить, соответствует ли пространственная структура получаемых мод модам Гаусса-Эрмита, мы перемещали торец волокна в фокальной плоскости объектива O_3 . При этом зависимость скорости счета детектора от координаты определяется сверткой соответствующей функ-

ции Гаусса-Эрмита и нулевой гауссовой моды:

$$R(x) \propto \int_{-\infty}^{\infty} H_{nm}(\tilde{x}/a) \exp\left(-\frac{\tilde{x}^2}{a^2}\right) \exp\left(-\frac{(x-\tilde{x})^2}{a^2}\right) d\tilde{x}, \quad (3.22)$$

где a - размер перетяжки пучка. Полученные зависимости для горизонтальных мод представлены на рис. 3.7 и имеют характерный вид кривых с двумя максимумами, положение которых зависит от номера моды, эта зависимость для «горизонтальных» ($m=0$) и «вертикальных» ($n=0$) мод, и теоретическая зависимость для мод TEM_{n0} и TEM_{0m} приведена на рис. 3.8.

При замене фундаментального гауссова лазерного пучка на излучение спонтанного параметрического рассеяния, описанная выше схема превращается в схему проекционных измерений в базисе мод Гаусса-Эрмита. Полная схема экспериментальной установки изображена на рис. 3.10. Накачка фокусировалась в кристалл ВВО толщиной 2 мм с помощью кварцевой линзы L1 с фокусным расстоянием $F_1 = 150$ мм. Эта линза устанавливалась конфокально линзе L2, фокусное расстояние которой ($F_2 = 145$ мм) было подобрано согласно описанному выше критерию сопряжения моды волокна и нулевой моды Шмидта. Излучение накачки отсекалось с помощью ультрафиолетового зеркала UVM, после чего производилась частотная фильтрация излучения СПР с помощью интерференционного фильтра IF. Используемые фильтры имели центр полосы пропускания на длине волны 650 нм и ширину полосы пропускания 40 нм или 10 нм. Существенного улучшения видности при измерениях с использованием более узкополосного фильтра замечено не было, все данные приводимые в дальнейшем получены с 40 нм фильтром. Фотоны из пары разделялись на неполяризованном 50% светоделителе. В проходящем канале был установлен пространственный фазовый модулятор, после которого излучение фокусировалось в одномодовое волокно 8X микрообъективом. Волокно подключалось

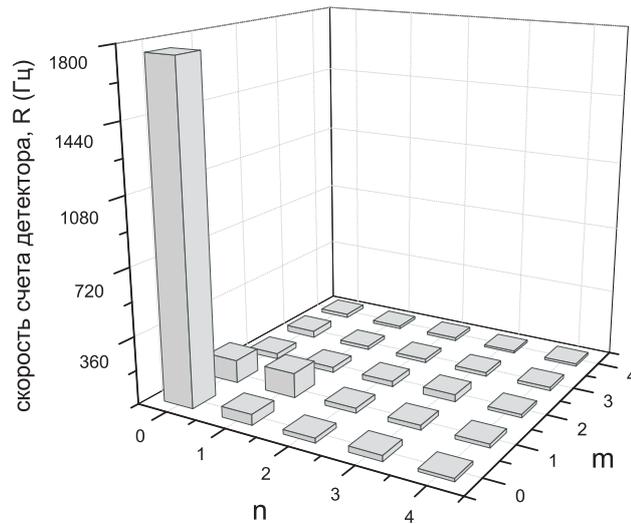


Рис. 3.6. Скорость счета детектора для лазерного пучка преобразованного в моды TEM_{mn} . Торец волокна установлен в положение, соответствующее $x = 0$ на рис. 3.7.

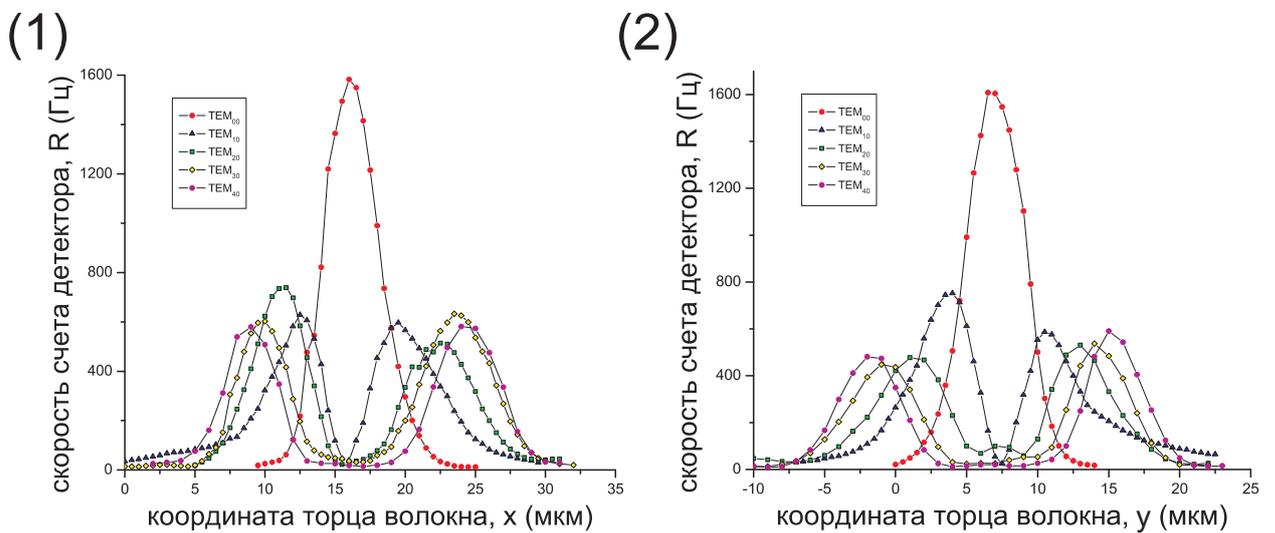


Рис. 3.7. Скорость счета детектора при сканировании торца волокна для лазерного пучка, преобразованного в различные моды. (1) - сканирование в горизонтальном направлении, (2) - в вертикальном.

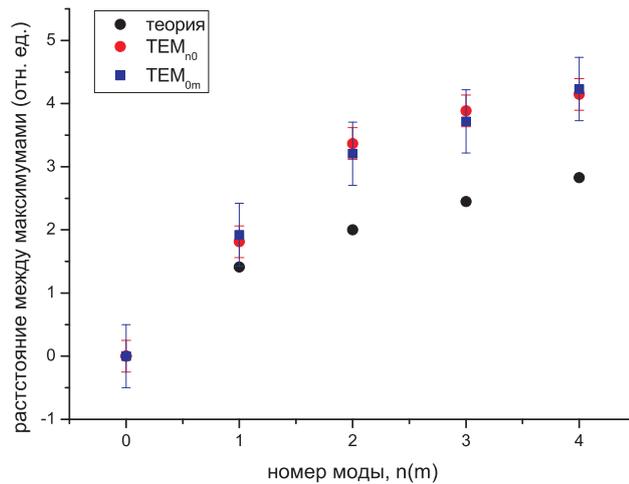


Рис. 3.8. Зависимость положения максимумов при перемещении торца волокна от номера моды для преобразования лазерного пучка. Видна симметрия горизонтальных и вертикальных мод, и количественное отличие в ~ 1.4 раза от расчетных значений (см. текст).

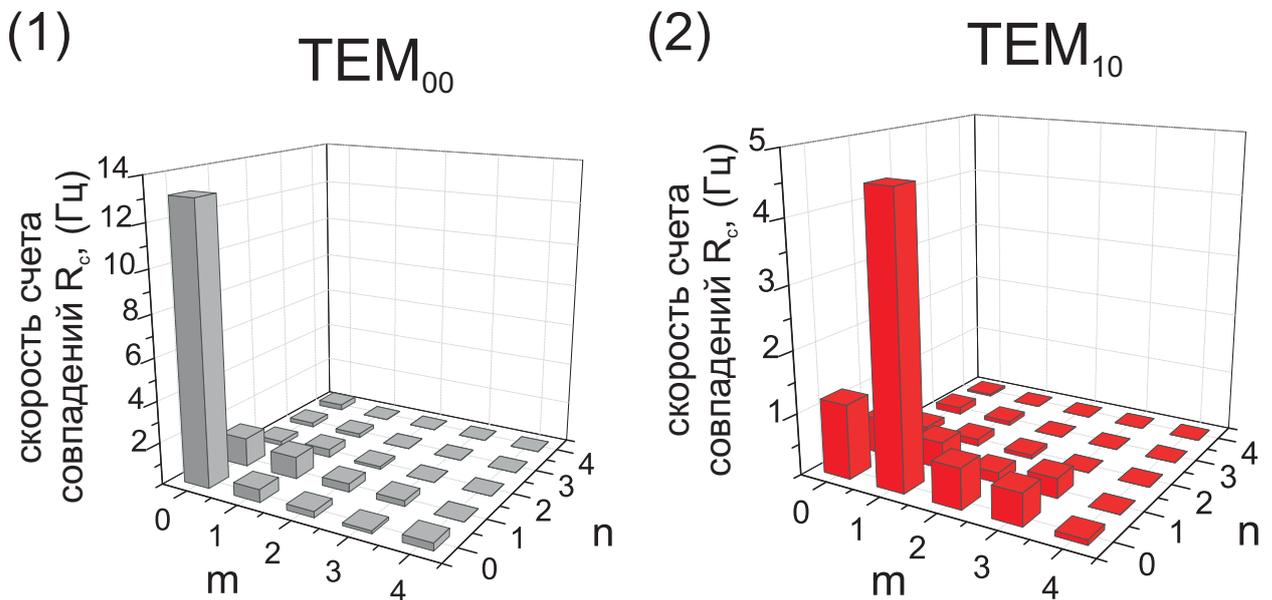


Рис. 3.9. Скорость счета совпадений для излучения СПР при различных масках в канале с фазовым модулятором. В отраженном канале выделяется мода TEM₀₀ - (1) и TEM₁₀ - (2).

к однофотонному детектору (лавинный фотодиод от Perkin-Elmer) В отраженном канале излучение фокусировалось таким же объективом в одномодовое волокно либо в многомодовое волокно с диаметром жилы порядка 50 мкм. В случае одномодового волокна в этом канале также осуществлялась проекция на фундаментальную гауссову моду, при установке же многомодового волокна детектор D2 регистрировал сразу все пространственные моды. Чтобы изменять регистрируемую в отраженном канале моду, туда вносилась фазовая маска, изготовленная из двух стеклянных пластин (покровных стекол для микроскопа), толщина которых отличалась на величину близкую к $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, приклеенных к подложке из предметного стекла. Такая конструкция позволяла заменить второй фазовый модулятор света, ограничиваясь правда преобразованиями в моды с $n, m = 1$.

Можно ожидать, что в случае, если приближение двойной гауссоидой действительно оправдано, и моды Шмидта близки к модам Гаусса-Эрмита, то совпадения фотоотсчетов детекторов в рассматриваемой экспериментальной схеме будут возникать только в случае, если в проходящем и отраженном канале выделяются одинаковые моды. В случае выделения различных мод в разных каналах совпадений не будет, поскольку в разложении (3.8) присутствуют только слагаемые с одинаковыми значениями индексов. Именно этот факт может служить в качестве экспериментально проверяемого критерия близости выделяемых в нашей схеме мод Гаусса-Эрмита к истинным модам Шмидта. На рис. 3.9 (1) представлена гистограмма скорости счета совпадений для случая, когда в проходящем канале выделялись последовательно все моды TEM_{mn} , $0 \leq m, n \leq 4$, а в отраженном - мода TEM_{00} . Полученные значения видности $V = (R_{00} - R_{mn}) / (R_{00} + R_{mn})$, где R_{mn} - скорость счета совпадений при проекции на моду TEM_{mn} в проходящем канале, составили более 94% для всех мод, за исключением TEM_{01}

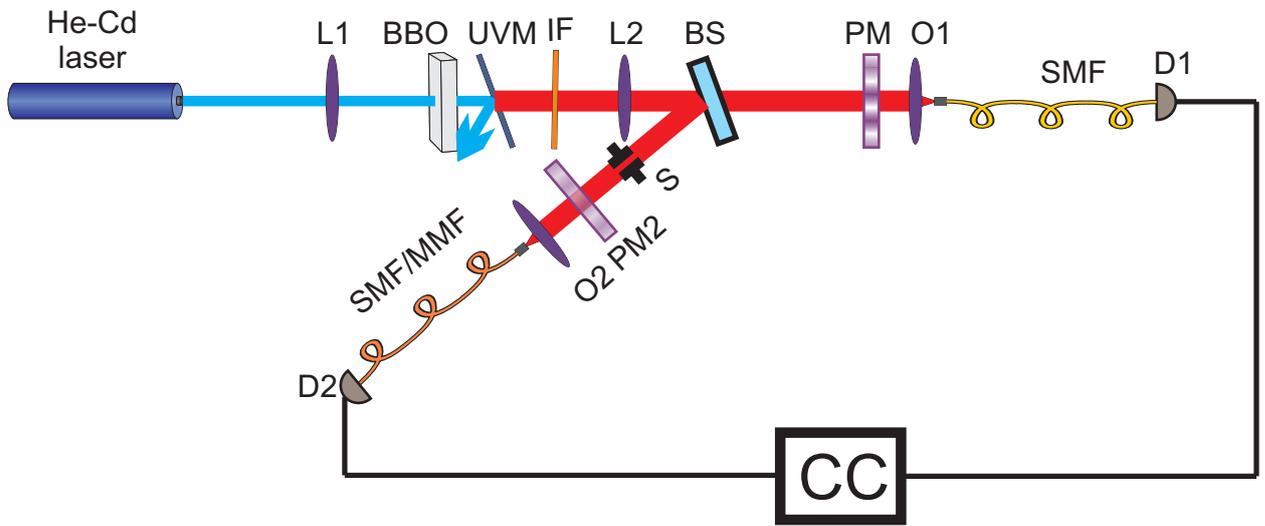


Рис. 3.10. Схема экспериментальной установки для реализации проекционных измерений в базисе мод Шмидта. L1 - кварцевая линза с $F = 150$ мм; L2 - линза с $F = 145$ мм; BBO - кристалл BBO толщиной 2 мм, установленный в общем фокусе линз L1 и L2; UVM - УФ зеркало, фильтрующее излучение накачки; IF - интерференционный фильтр с центром полосы пропускания 650 нм и шириной полосы 40 нм (иногда использовался 10 нм фильтр); BS - неполяризационный 50% светоделитель; O1,2 - 8X микробъективы, PM - пространственный фазовый модулятор (для простоты изображен работающим на пропускание); PM2 - фазовая маска, выполненная в виде стеклянной пластинки переменной толщины (см. текст); SMF - одномодовое волокно; SMF/MMF - одномодовое или многомодовое волокно в зависимости от типа эксперимента (см. текст); D1,2 - однофотонные детекторы с волоконным входом (лавинные фотодиоды Perkin-Elmer). В эксперименте по построению «скрытых изображений» мод (см. текст) использовалась вертикальная щель S шириной 200 мкм.

и TEM_{11} . Из сравнения с рис. 3.6 можно заключить, что отличия видности от 100% скорее объясняется недостатками юстировочной процедуры, общими для экспериментов с СПР и лазерными пучками, чем отличием детектируемых мод от мод Шмидта. Таким образом, можно утверждать, что предложенная процедура действительно реализует проекционные измерения в базисе мод Шмидта.

Как и следовало ожидать, при установке в отраженном канале маски, соответствующей моде TEM_{10} , наибольшая скорость счета совпадений имеет место для сопряженной моды. Экспериментально полученное распределение для этого случая приведено на рис. 3.9 (2). Худшая видность картины по сравнению с рис. 3.9 (1) объясняется главным образом низким качеством стеклянной маски, использованной для преобразования мод в отраженном канале.

Дальнейшее подтверждение близости пространственной структуры детектируемых мод Шмидта и модельных мод Гаусса-Эрмита можно получить из анализа зависимости скорости счета совпадений при перемещении торца волокна в фокальной плоскости объектива в канале с фазовым модулятором. Можно ожидать, что эта зависимость будет описываться выражением вида (3.22). Экспериментально полученные зависимости для сканирования в горизонтальной плоскости приведены на рис. 3.11. Заметим, что характерная зависимость с двумя максимумами проявляется только в распределении совпадений, в то время как количество единичных отсчетов сканируемого детектора ведет себя монотонно, как и следовало ожидать для многомодового излучения. Заметно лишь уменьшение количества отсчетов в максимуме с ростом номера моды, далее мы подробно исследуем эту зависимость. Положения максимумов зависят от номера моды аналогично случаю лазерного пучка. Обе зависимости для сравнения представ-

лены на рис. 3.13.

Полностью аналогичные зависимости для скорости счета совпадений получались и при сканировании торца одномодового волокна в отраженном канале (см. рис. 3.12). При этом, естественно, распределения единичных отсчетов вообще не зависели от выделяемой в сопряженном канале моды. Этот эффект является непосредственным проявлением пространственных корреляций в спектре СПР и по своей природе схож с хорошо известным явлением «скрытой интерференции» (ghost interference) [91]. Заметим, что наблюдаемое уменьшение скорости счета совпадений в точке, соответствующей центральному положению волокна, практически до нуля - интерференционный эффект, свидетельствующий о пространственной когерентности выделяемых мод. Таким образом, этот результат может служить подтверждением одного из основных свойств мод Шмидта - их пространственной когерентности.

Форму выделяемых когерентных мод можно наблюдать и непосредственно. Для этого одномодовое волокно в отраженном канале заменялось на многомодовое, играющее роль «большого» детектора, собирающего все пространственные моды. Перед объективом в отраженном канале устанавливалась вертикальная щель шириной 200 мкм. Зависимость скорости счета совпадений, получаемая при перемещении щели в горизонтальном направлении, повторяет форму моды, выделяемой в проходящем канале (так называемое, «скрытое изображение»). Полученные зависимости для первых трех мод HG_{00} , HG_{10} , HG_{20} , соответственно, представлены на рис. 3.14. Сплошные кривые на графиках соответствуют аппроксимации функциями Гаусса-Эрмита⁶.

⁶С дополнительным Гауссовым множителем, учитывающим протяженность щели в вертикальном направлении и соответствующее изменение интегральной интенсивности.

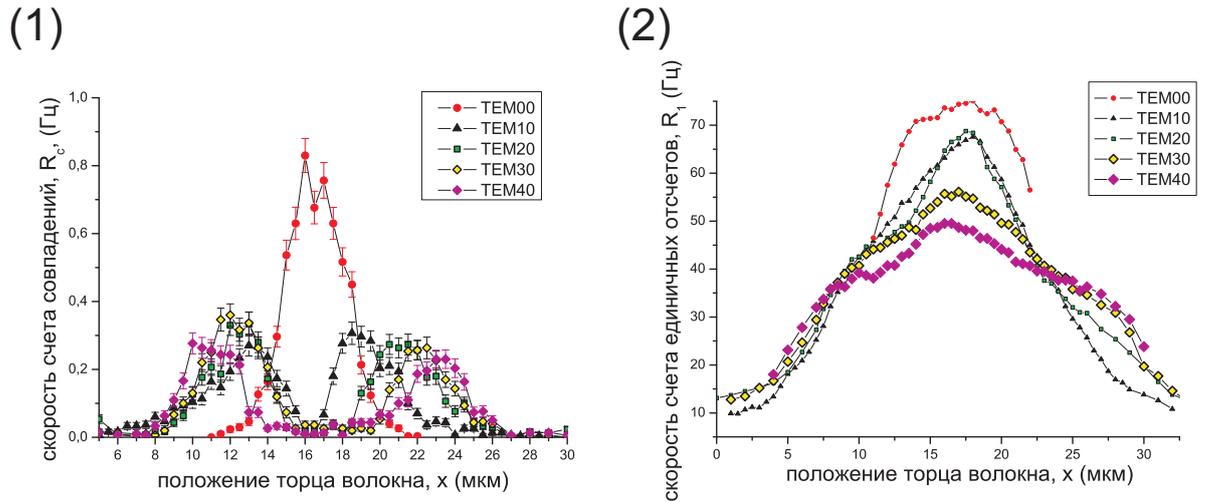


Рис. 3.11. Скорость счета совпадений (1) и единичных отсчетов (2) при сканировании торца волокна в канале с фазовым модулятором при проекции на различные моды. Сканирование производилось в горизонтальном направлении.

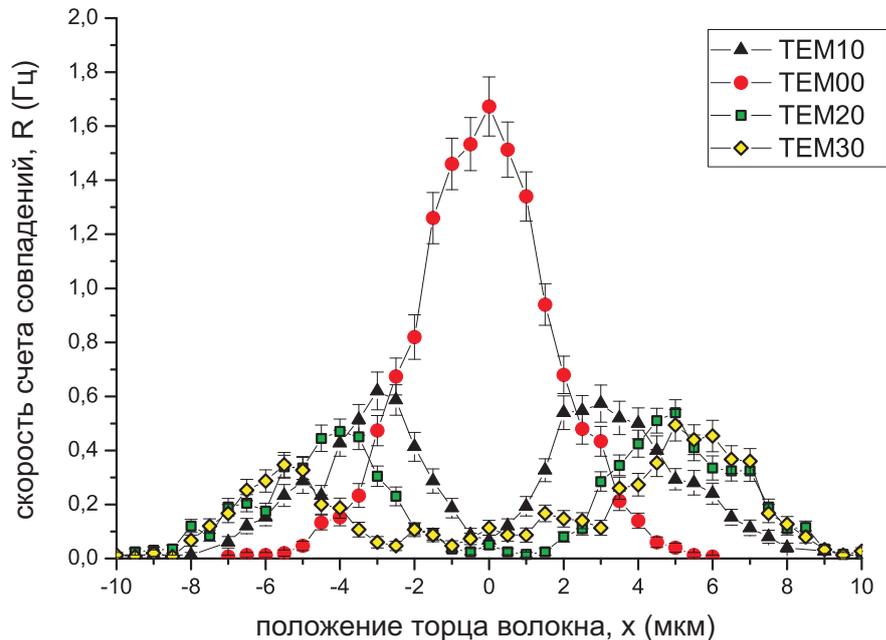


Рис. 3.12. Скорость счета совпадений при сканировании торца волокна в отраженном канале (канале без фазового модулятора) при проекции на различные моды. Сканирование производилось в горизонтальном направлении.

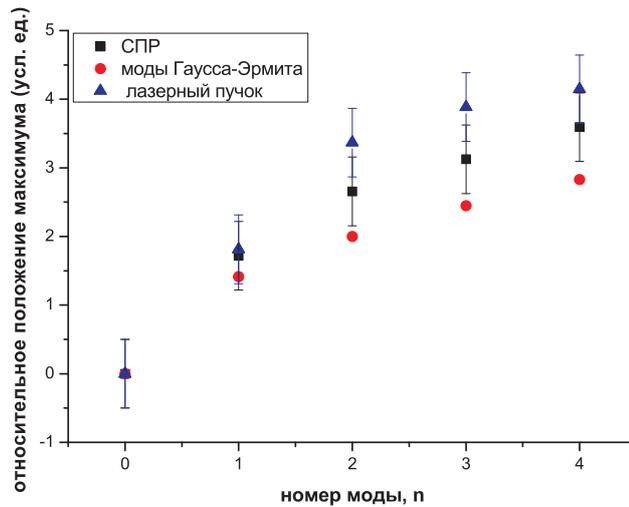


Рис. 3.13. Зависимость положения максимумов при перемещении торца волокна в канале с фазовым модулятором от номера моды. Для сравнения приведена зависимость для лазерного пучка (синие треугольники) и для мод согласно модели двойной гауссоиды (красные круги).

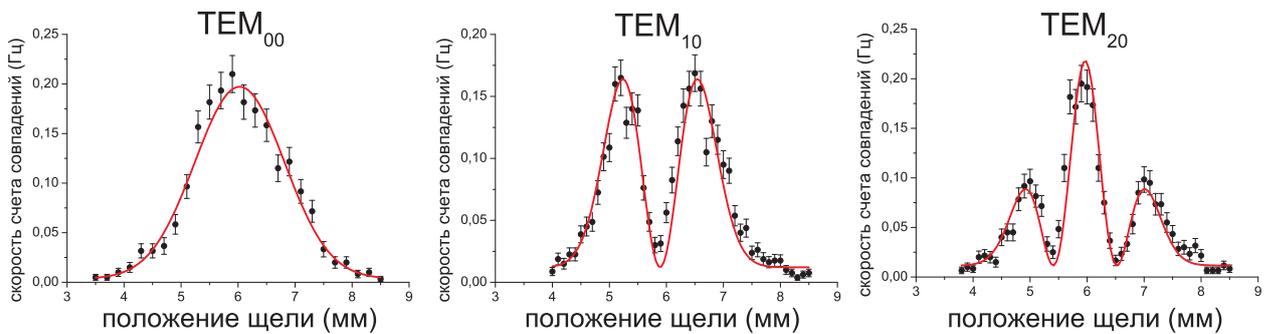


Рис. 3.14. Скорость счета совпадений при сканировании щели в отраженном канале. При этом одномодовое волокно заменено на многомодовое, что позволяет наблюдать «скрытое изображение», повторяющее форму моды, выделяемой в канале с фазовым модулятором. Приведены зависимости для первых трех мод.

Как отмечалось выше, количество единичных отсчетов детектора в канале с фазовым преобразователем при положении волокна, соответствующем максимуму гауссовой моды, уменьшается с ростом номера детектируемой моды. Действительно, состояние каждого из фотонов пары описывается матрицей плотности, которая в базисе мод Шмидта $\psi_{nm}(\vec{k}_i)$ имеет вид:

$$\rho(\vec{k}_i, \vec{k}'_i) = \sum_{n,m} \lambda_{nm} \psi_{nm}(\vec{k}_i) \psi_{nm}(\vec{k}'_i), \quad (3.23)$$

где $i = 1, 2$ - индекс, нумерующий фотоны. Поэтому, скорость счета детектора D1: $R_{1mn} \sim \langle \psi_{mn} | \rho | \psi_{mn} \rangle \sim \lambda_{mn}$ пропорциональна соответствующему собственному значению, «весу» с которым мода входит в разложение Шмидта. Таким образом, анализируя скорость счета единичных отсчетов мы получаем возможность определить собственные значения в разложении Шмидта. На рис. 3.15 (1) представлена диаграмма скорости счета детектора D1 для различных мод Шмидта, ее следует сравнить с распределением собственных значений матрицы плотности в базисе мод Гаусса-Эрмита, представленном на рис. 3.15 (2). Количественной оценкой соответствия результатов эксперимента и теоретических предсказаний может служить величина *fidelity*

$$F = \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho} \rho^{(exp)} \sqrt{\rho}} = \sum_{m,n} \sqrt{\lambda_{mn} \lambda_{mn}^{(exp)}}, \quad (3.24)$$

где экспериментальная оценка для матричных элементов $\lambda_{mn}^{(exp)} = (R_{1mn} - R_0) / \sum_{mn} R_{1mn}$ учитывает нормировку, обеспечивающую равенство единице следа матрицы плотности, и вычет постоянного шумового сигнала R_0 , основной вклад в который дает посторонняя засветка и недифрагировавшая часть излучения СПР. Экспериментальным данным, приведенным на рис. 3.15 соответствует значение $F = 0.92 \pm 0.03$.

Количественная оценка числа Шмидта может быть получена из анализа одномерного распределения мод типа TE_{m0} , приведенного на рис. 3.16. Это распределение прекрасно аппроксимируется экспоненциальной зависимостью вида $R_{1m0} = R_0 + C \exp(-\gamma n)$ (коэффициент корреляции $R^2 = 0.993$). Используя выражение (3.20) для числа Шмидта получаем, что $\lambda_{n+1}/\lambda_n = (K_x - 1)/(K_x + 1)$, откуда нетрудно получить оценку для числа Шмидта в виде:

$$K_x = \frac{e^\gamma + 1}{e^\gamma - 1}. \quad (3.25)$$

Таким образом, экспериментальная оценка для числа Шмидта $K_x = 3.1 \pm 0.9$. Аналогичная процедура для распределения весов «вертикальных» мод R_{0n} дает значение $K_y = 2.7 \pm 0.5$. Оба значения хорошо согласуются со значением $K = 2.97$, получаемым из (3.20) при соответствующих условиях эксперимента значениях параметров $a = 5.8 \times 10^{-3}$ и $b = 0.037$.

Качественно поведение измеренных собственных значений полностью соответствует как модельной зависимости в приближении двойной гауссоиды, так и результатам численного расчета. Небольшие количественные расхождения нельзя объяснить статистическими флуктуациями. Частично их можно отнести на счет обнаруженных нами долговременных колебаний сигнала, связанных скорее всего с непостоянством температуры. Как показали эксперименты, даже незначительные смещения пучка относительно волокна приводят к существенным различиям в скорости счета как совпадений, так и единичных отсчетов. Например, работа кондиционера, поддерживающего температуру в помещении постоянной с точностью до $1 - 2^\circ\text{C}$ приводит к четко прослеживающейся периодической зависимости сигнала от времени с периодом порядка 10 минут. Поэтому значения скоростей счета для разных мод полученные в различные моменты времени (длительность экспозиции для каждого измерения в среднем составляла 2 минуты)

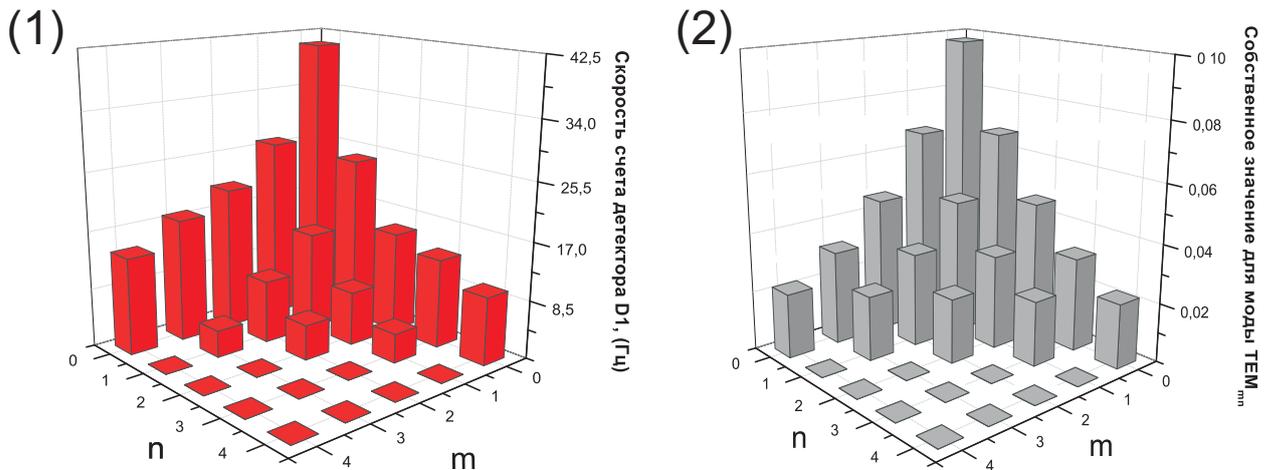


Рис. 3.15. Распределение собственных значений в Шмидтовском базисе. (1) Скорость счета детектора D1 в канале с фазовым модулятором в зависимости от детектируемой моды. (2) Собственные значения матрицы плотности в базисе мод Гаусса-Эрмита (т.е. в приближении двойной гауссоиды).

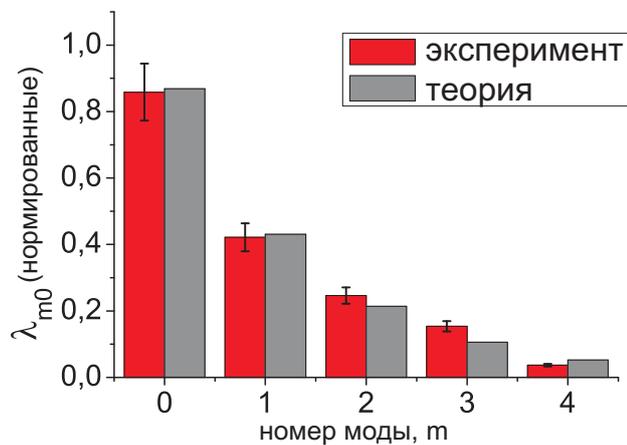


Рис. 3.16. Распределение собственных значений в Шмидтовском базисе. Красным цветом изображены экспериментально полученные значения, серым - расчетные, соответствующие экспоненциальной зависимости в приближении двойной гауссоиды.

могут соответствовать разным уровням общего сигнала. Именно величина этих колебаний указана как оценка ошибки на рис. 3.16. Полная тепло- и виброизоляция экспериментальной установки должна устранить эти изменения. Существенный вклад в различие экспериментальных и рассчитанных значений, как нам представляется, вносит отличие угловой ширины излучения попадающего в апертуру детектора от полной ширины углового спектра СПР. Очень резкая зависимость скорости счета от положения волокна относительно фокуса микрообъективов имеет максимум при положении, несколько отличающемся от точного фокуса. Кроме того, принимаемая в расчетах гауссовой, накачка, на самом деле имеет, расходямость в $M^2 = 1.4$ раз большую чем дифракционная, что очевидно должно изменить форму распределения. Тем не менее, представленные результаты, на наш взгляд, позволяют с уверенностью говорить о принципиальной работоспособности предложенной схемы проекционных измерений в базисе мод Гаусса-Эрмита и ее пригодности для количественных измерений.

§ 3.6. Заключение к главе 3

Нами было проанализировано пространственное перепутывание в угловом спектре спонтанного параметрического рассеяния с точки зрения разложения по пространственным модам Шмидта. Показано, что в приближениях вполне соответствующих экспериментальным условиям можно считать моды Шмидта близкими по форме к модам Гаусса-Эрмита. Это позволило реализовать экспериментальную схему проекционных измерений в Шмидтовском базисе на основе преобразования пространственных мод с помощью пространственного фазового модулятора. Было экспериментально продемонстрировано высокое качество преобразования фундаменталь-

ного гауссова пучка в различные моды высших порядков. Для многомодового излучения СПР была экспериментально продемонстрирована возможность фильтрации заданной пространственной моды с помощью фазового модулятора и одномодового оптического волокна. Экспериментально подтверждена близость мод Гаусса-Эрмита к реальным модам Шмидта для углового спектра бифотонного поля. Измерено распределение собственных значений, соответствующих модам Шмидта, и получено разумное соответствие с расчетными значениями. Получена полная *двумерная* структура модового разложения амплитуды бифотона в базисе мод Шмидта, что насколько нам известно, сделано впервые. Разработанные методики, позволяющие осуществлять преобразования и измерения в ортогональном базисе пространственных мод, могут служить основой экспериментальной реализации многих протоколов квантовой информации, требующих использования систем высокой размерности. Также отметим, что характеристика пространственного перепутывания на основе прямых измерений представляет собой важную с фундаментальной точки зрения задачу, один из возможных путей решения которой осуществлен в данной работе.

Заключение

В заключении сформулируем основные результаты диссертационной работы.

1. Рассмотрен вопрос о возможности представления поляризационных состояний пары фотонов как состояния пары различных кубитов. В случае *бифотона*, т.е. пары фотонов, рождающихся в процессе спонтанного параметрического рассеяния света положительный ответ на этот вопрос обеспечивают дополнительные ограничения, накладываемые условиями фазового синхронизма. Подробно рассмотрен пример протокола квантовой телепортации в системе тождественных фотонов. С учетом перестановочной симметрии в явном виде показано, что описание протокола в системе тождественных частиц эквивалентно описанию в системе различных кубитов.
2. Предложены методы приготовления произвольного, наперед заданного состояния кукварта, использующие бифотоны невырожденные по частоте. Исследована возможность приготовления в предложенной схеме перепутанных состояний куквартов, получены экспериментальные результаты по двухфотонной интерференции и предложены методы улучшения ее видности, не требующие использования узкополосных частотных фильтров. Экспериментально реализована схема для приготовления и квантовой томографии смешанных состояний куквартов, позволяющая достичь высокого качества восстановления

матриц плотности смешанных состояний. Продемонстрировано приготовление и томография смешанных состояний с различной энтропией, а также возможность преобразования состояний с диагональной матрицей плотности в состояния общего вида.

3. Проанализировано пространственное перепутывание в угловом спектре спонтанного параметрического рассеяния с точки зрения разложения по пространственным модам Шмидта. Экспериментально продемонстрирована возможность фильтрации заданной пространственной моды с помощью фазового модулятора и одномодового оптического волокна. Экспериментально подтверждена близость мод Гаусса-Эрмита к реальным модам Шмидта для углового спектра бифотонного поля. Измерено распределение собственных значений, соответствующих модам Шмидта, и получено разумное соответствие с расчетными значениями. Получена полная *двумерная* структура модового разложения амплитуды бифотона в базисе мод Шмидта.

Литература

1. *Schumacher B.* Quantum coding // *Phys. Rev. A.* — 1995. — Vol. 51. — P. 2738.
2. *Bell J. S.* On the einstein podolsky rosen paradox // *Physics.* — 1964. — Vol. 1. — Pp. 195–200.
3. Proposed experiment to test local hidden-variable theories / J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt // *Phys. Rev. Lett.* — 1969. — Vol. 23. — Pp. 880–884.
4. *Bell J.* Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics. — Cambridge University Press, 1987.
5. *Durt T., Kaszlikowski D., Zukowski M.* Violations of local realism with quantum systems described by n-dimensional hilbert spaces up to n=16 // *Phys. Rev. A.* — 2001. — Vol. 64. — P. 024101.
6. Clauser-horne inequality for three-state systems / D. Kaszlikowski, L. C. Kwek, J.-L. Chen et al. // *Phys. Rev. A.* — 2002. — Vol. 65. — P. 032118.
7. Bell inequalities for arbitrarily high-dimensional systems / D. Collins, N. Gisin, N. Linden et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 88. — P. 040404.

8. *Bechmann-Pasquinucci H., Peres A.* Quantum cryptography with 3-state systems // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — Vol. 85. — P. 3313.
9. *Bechmann-Pasquinucci H., Tittel W.* Quantum cryptography using larger alphabets // *Phys. Rev. A.* — 2000. — Vol. 61. — P. 062308.
10. *Bourennane M., Karlsson A., Bjork G.* Quantum key distribution using multilevel encoding // *Phys. Rev. A.* — 2001. — Vol. 64. — P. 012306.
11. Security of quantum key distribution using d-level systems / N. J. Cerf, M. Bourennane, A. Karlsson, N. Gisin // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 88. — P. 127902.
12. *Д.Н.Клышко.* Фотоны и нелинейная оптика. — М.: «Наука», 1980. — С. 177.
13. Experimental realization of entangled qutrits for quantum communication / R. Thew, A. Acin, H. Zbinden, N. Gisin // *Quantum Information and Computation.* — 2004. — Vol. 4, no. 2. — Pp. 093–101.
14. Tailoring photonic entanglement in high-dimensional hilbert spaces / H. de Riedmatten, I. Marcikic, V. Scarani et al. // *Phys. Rev. A.* — 2004. — Vol. 69. — P. 050304.
15. *Stucki D., Zbinden H., Gisin N.* A fabry–perot-like two-photon interferometer for high-dimensional time-bin entanglement // *Phys.Rev.Lett.* — 2005. — Vol. 89. — P. 2637.
16. *Vaziri A., Weihs G., Zeilinger A.* Experimental two-photon, three-dimensional entanglement for quantum communication // *Journal of Modern Optics.* — 2002. — Vol. 89. — P. 240401.

17. *Molina-Terriza G., Torres J. P., Torner L.* Management of the angular momentum of light: Preparation of photons in multidimensional vector states of angular momentum // *Phys.Rev.Lett.* — 2002. — Vol. 88. — P. 013601.
18. Generation of entangled states of qudits using twin photons / L. Neves, G. Lima, J. G. A. Górmes et al. // *Phys.Rev.Lett.* — 2005. — Vol. 94. — P. 100501.
19. Pixel entanglement: Experimental realization of optically entangled $d = 3$ and $d = 6$ qudits / M. N. O'Sullivan-Hale, I. A. Khan, R. W. Boyd, J. C. Howell // *Phys.Rev.Lett.* — 2005. — Vol. 94. — P. 220501.
20. Anisotropically and high entanglement of biphoton states generated in spontaneous parametric down-conversion / M. V. Fedorov, M. A. Efremov, P. A. Volkov et al. // *Phys.Rev.Lett.* — 2007. — Vol. 99. — P. 063901.
21. Qutrit state engineering with biphotons / Y. I. Bogdanov, M. V. Chekhova, S. P. Kulik et al. // *Phys.Rev.Lett.* — 2004. — Vol. 93. — P. 230503.
22. Measurement of qubits / D. F. V. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro, A. G. White // *Phys. Rev. A.* — 2001. — Vol. 64. — P. 052312.
23. *D'Ariano G. M., Mataloni P., Sacchi M. F.* Generating qudits with $d = 3, 4$ encoded on two-photon states // *Phys. Rev. A.* — 2005. — Vol. 71. — P. 062337.
24. Experimental realization of polarization qutrits from nonmaximally entangled states / G. Vallone, E. Pomarico, F. D. Martini, P. Mataloni // *Phys. Rev. A.* — 2007. — Vol. 76. — P. 012319.

25. Realization of four-level qudits using biphotons / E. Moreva, G. A. Maslennikov, S. S. Straupe, S. P. Kulik // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 97. — P. 023602.
26. Polarization states of four-dimensional systems based on biphotons / Y. I. Bogdanov, E. V. Moreva, G. A. Maslennikov et al. // *Phys. Rev. A.* — 2006. — Vol. 73. — P. 063810.
27. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs / P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 75. — P. 4337.
28. Ultrabright source of polarization-entangled photons / P. G. Kwiat, E. Waks, A. G. White et al. // *Phys. Rev. A.* — 1999. — Vol. 60. — P. R773.
29. М.В. Чехова. Двухфотонный спектрометр // *Письма в ЖЭТФ.* — 2002. — Т. 75, № 5. — С. 271–272.
30. Бифотонное излучение со скрытой поляризацией и его поляризационная томография / П.А.Бушев, В.П.Карасев, А.В.Масалов, А.А.Путилин // *Оптика и спектроскопия.* — 2001. — Т. 91. — С. 558–564.
31. В.П.Карасев, А.В.Масалов. Состояния неполяризованного света в квантовой оптике // *Оптика и спектроскопия.* — 1993. — Т. 74. — С. 928.
32. Macroscopic pure state of light free of polarization noise / T. S. Iskhakov, M. V. Chekhova, G. O. Rytikov, G. Leuchs // *arXiv:1011.1840v1 [quant-ph]*. — 2010.
33. Entanglement of qutrits and ququarts / M. V. Fedorov, P. A. Volkov, Y. M. Mikhailova et al. // *arXiv:1009.2744v2 [quant-ph]*. — 2010.

34. *Hill S., Wootters W. K.* Entanglement of a pair of quantum bits // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 78. — P. 5022.
35. *Wootters W. K.* Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Vol. 80. — P. 2245.
36. Concentrating partial entanglement by local operations / C.H.Bennett, H.J.Bernstein, S.Popescu, B.Shumacher // *Phys. Rev. A.* — 1996. — Vol. 53. — P. 2046.
37. *M.A.Nielsen, I.L.Chuang.* Quantum Computation and Quantum Information. — Cambridge University Press, 2000. — P. 580.
38. Mixed-state entanglement and quantum error correction / C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, W. K. Wootters // *Phys. Rev. A.* — 1996. — Vol. 54. — P. 3824.
39. *Zanardi P.* Virtual quantum subsystems // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 87. — P. 077901.
40. *Zanardi P., Lidar D. A., Lloyd S.* Quantum tensor product structures are observable induced // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 92. — P. 060402.
41. Quantum correlations in two-fermion systems / J. Schliemann, J. I. Cirac, M. Kus et al. // *Phys. Rev. A.* — 2001. — Vol. 64. — P. 022303.
42. *Paskauskas R., You L.* Quantum correlations in two-boson wave functions // *Phys. Rev. A.* — 2001. — Vol. 64. — P. 042310.
43. *Zanardi P.* Quantum entanglement in fermionic lattices // *Phys. Rev. A.* — 2002. — Vol. 65. — P. 042101.

44. *Gittings J. R., Fisher A. J.* Describing mixed spin-space entanglement of pure states of indistinguishable particles using an occupation-number basis // *Phys. Rev. A.* — 2002. — Vol. 66. — P. 032305.
45. Experimental quantum teleportation / D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle et al. // *Nature.* — 1997. — Vol. 390. — P. 575.
46. Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels / D. Boschi, S. Branca, F. D. Martini et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — Vol. 80. — P. 1121–1125.
47. *Kim Y.-H., Kulik S. P., Shih Y.* Quantum teleportation of a polarization state with a complete bell state measurement // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86. — P. 1370–1373.
48. *Peres A.* Quantum Theory: Concepts and Methods. — Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1995.
49. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels / C.H.Bennett, G.Brassard, C.Crepeau et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Vol. 70. — Pp. 1895–1899.
50. Quantum state engineering with ququarts: Application for deterministic qkd protocol / A. P. Shurupov, S. S. Straupe, S. P. Kulik et al. // *Europhys. Lett.* — 2009. — Vol. 87(1). — P. 10008.
51. Interference effects in spontaneous two-photon parametric scattering from two macroscopic regions / A. V. Burlakov, M. V. Chekhova, D. N. Klyshko et al. // *Phys. Rev. A.* — 1997. — Vol. 56. — P. 3214.

52. Generation of different bell states within the spontaneous parametric down-conversion phase-matching bandwidth / G. Brida, M. Chekhova, M. Genovese, L. Krivitsky // *Phys. Rev. A.* — 2007. — Vol. 76. — P. 053807.
53. Spontaneous parametric down-conversion: Anisotropical and anomalously strong narrowing of biphoton momentum correlation distributions / M. V. Fedorov, M. A. Efremov, P. A. Volkov et al. // *Phys. Rev. A.* — 2008. — Vol. 77. — P. 032336.
54. *Cialdi S., Brivio D., Paris M. G. A.* Programmable purification of type-i polarization-entanglement // *Appl. Phys. Lett.* — 2010. — Vol. 97. — P. 041108.
55. Statistical estimation of the efficiency of quantum state tomography protocols / Y. I. Bogdanov, G. Brida, M. Genovese et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 105. — P. 010404.
56. *Monken C. H., Ribeiro P. H. S., Padua S.* Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion // *Phys. Rev. A.* — 1998. — Vol. 57. — P. 3123.
57. *Walborn S. P., de Oliveira A. N., Monken C. H.* Multimode hong-ou-mandel interference // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 90. — P. 143601.
58. Packet narrowing and quantum entanglement in photoionization and photodissociation / M. V. Fedorov, M. A. Efremov, A. E. Kazakov et al. // *Phys. Rev. A.* — 2004. — Vol. 69. — P. 052117.
59. *Parker S., Bose S., Plenio M. B.* Entanglement quantification and purification in continuous-variable systems // *Phys. Rev. A.* — 2000. — Vol. 61. — P. 032305.

60. *Law C. K., Walmsley I. A., Eberly J. H.* Continuous frequency entanglement: Effective finite hilbert space and entropy control // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — Vol. 84. — P. 5304.
61. *Law C. K., Eberly J. H.* Analysis and interpretation of high transverse entanglement in optical parametric down conversion // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 92. — P. 127903.
62. Effect of spatial filtering on the schmidt decomposition of entangled photons / M. P. van Exter, A. Aiello, S. S. R. Oemrawsingh et al. // *Phys. Rev. A.* — 2006. — Vol. 74. — P. 012309.
63. Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes / L. Allen, M. Beijersbergen, R. J. Spreeuw, J. P. Woerdman // *Phys. Rev. A.* — 1992. — Vol. 45. — Pp. 8185–8189.
64. *Allen L., Padgett M. J., Babiker M.* The orbital angular momentum of light // *Prog. Opt.* — 1999. — Vol. 39. — Pp. 291–372.
65. Two-photon entanglement of orbital angular momentum states / S. Franke-Arnold, S. M. Barnett, M. J. Padgett, L. Allen // *Phys. Rev. A.* — 2002. — Vol. 65. — P. 033823.
66. *Arnaut H. H., Barbosa G. A.* Orbital and intrinsic angular momentum of single photons and entangled pairs of photons generated by parametric down-conversion // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — Vol. 85. — P. 286.
67. *Barbosa G. A.* Wave function for spontaneous parametric down-conversion with orbital angular momentum // *Phys. Rev. A.* — 2009. — Vol. 80. — P. 063833.

68. *Feng S., Kumar P.* Spatial symmetry and conservation of orbital angular momentum in spontaneous parametric down-conversion // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 101. — P. 163602.
69. Quantum spiral bandwidth of entangled two-photon states / J. P. Torres, A. Alexandrescu, , L. Torner // *Phys. Rev. A.* — 2003. — Vol. 68. — P. 050301(R).
70. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons / A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, A. Zeilinger // *Nature.* — 2001. — Vol. 412. — Pp. 313–316.
71. Measuring the orbital angular momentum of a single photon / J. Leach, M. J. Padgett, S. M. Barnett et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 88. — P. 257901.
72. Entanglement and conservation of orbital angular momentum in spontaneous parametric down-conversion / S. P. Walborn, A. N. de Oliveira, R. S. Thebaldi, C. H. Monken // *Phys. Rev. A.* — 2004. — Vol. 69. — P. 023811.
73. Concentration of higher dimensional entanglement: Qutrits of photon orbital angular momentum / A. Vaziri, J.-W. Pan, T. Jennewein et al. // *Phys.Rev.Lett.* — 2003. — Vol. 91. — P. 227902.
74. Measuring entangled qutrits and their use for quantum bit commitment / N. K. Langford, R. B. Dalton, M. D. Harvey et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 93. — P. 053601.
75. Experimental demonstration of fractional orbital angular momentum en-

- tanglement of two photons / S. S. R. Oemrawsingh, D. V. X. Ma, A. Aiello et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Vol. 95. — P. 240501.
76. Entanglement of arbitrary superpositions of modes within two-dimensional orbital angular momentum state spaces / B. Jack, A. M. Yao, J. Leach et al. // *Phys. Rev. A.* — 2010. — Vol. 81. — P. 043844.
77. *Peeters W. H., Verstegen E. J. K., van Exter M. P.* Orbital angular momentum analysis of high-dimensional entanglement // *Phys. Rev. A.* — 2007. — Vol. 76. — P. 042302.
78. *Pires H. D. L., Florijn H. C. B., van Exter M. P.* Measurement of the spiral spectrum of entangled two-photon states // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 104. — P. 020505.
79. Angular two-photon interference and angular two-qubit states / A. K. Jha, J. Leach, B. Jack et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 104. — P. 010501.
80. *Walborn S. P., Padua S., Monken C. H.* Conservation and entanglement of hermite-gaussian modes in parametric down-conversion // *Phys. Rev. A.* — 2005. — Vol. 71. — P. 053812.
81. *Fedorov M. V., Mikhailova Y. M., Volkov P. A.* Gaussian modeling and schmidt modes of spdc biphoton states // *J.Phys.B:At.Mol.Opt.Phys.* — 2009. — Vol. 42. — P. 175503.
82. *Calvo G. F., Picon A., Bramon A.* Measuring two-photon orbital angular momentum entanglement // *Phys. Rev. A.* — 2007. — Vol. 75. — P. 012319.
83. Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phaseplate / M. W. Beijersbergen, R. P. C. Coerwinkel, M. Kristensen, J. P. Woerdman // *Opt. Commun.* — 1994. — Vol. 112. — Pp. 321–327.

84. The generation of free-space laguerre-gaussian modes at millimetre-wave frequencies by use of a spiral phaseplate / G. A. Turnbull, D. A. Robertson, G. M. Smith et al. // *Opt. Commun.* — 1996. — Vol. 127. — Pp. 183–188.
85. Laser beams with phase singularities / N. R. Heckenberg, R. McDuff, C. P. Smith et al. // *Opt. Quant. Electron.* — 1992. — Vol. 24. — Pp. S951–S962.
86. The production of multiringed laguerre-gaussian modes by computer-generated holograms / J. Arlt, K. Dholakia, L. Allen, M. J. Padgett // *J. Mod. Opt.* — 1998. — Vol. 45. — Pp. 1231–1237.
87. Generation of high-quality higher-order laguerre-gaussian beams using liquid-crystal-on-silicon spatial light modulators / N. Matsumoto, T. Ando, T. Inoue et al. // *J. Opt. Soc. Am. A.* — 2008. — Vol. 25. — Pp. 1642–1651.
88. How to create and detect n-dimensional entangled photons with an active phase hologram / M. Stutz, S. Gröblacher, T. Jennewein, A. Zeilinger // *Applied Physics Letters.* — 2007. — Vol. 90. — P. 261114.
89. Quantum correlations in optical angle-orbital angular momentum variables / J. Leach, B. Jack, J. Romero et al. // *Science.* — 2010. — Vol. 329. — Pp. 662–665.
90. Precise quantum tomography of photon pairs with entangled orbital angular momentum / B. Jack, J. Leach, H. Ritsch et al. // *New Journal of Physics.* — 2009. — Vol. 11. — P. 103024.
91. Identifying entanglement using quantum ghost interference and imaging / M. D'Angelo, Y.-H. Kim, S. P. Kulik, Y. Shih // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 92. — P. 233601.

Благодарности

В заключение мне хотелось бы выразить чувство глубокой признательности своему научному руководителю профессору Сергею Павловичу Кулику, без неоценимой помощи которого невозможно представить мою научную работу.

Я очень благодарен Александру Николаевичу Пенину, Марии Владимировне Чеховой, Сергею Николаевичу Молоткову, Кате Моревой, Ивану Агафонову, Косте Катамадзе, Глебу Масленикову, Тимуру Исхакову, Александру Шурупову, а также остальным сотрудникам, аспирантам и студентам лабораторий квантовой информации и квантовой оптики и спонтанного параметрического рассеяния.

Я благодарю Михаила Владимировича Федорова, значение многочисленных дискуссий с которым трудно переоценить. Его открытость и готовность делиться идеями всегда будет служить для меня примером.

Также мне хотелось бы выразить признательность коллегам из Корейского университета Pohang University of Science and Technology, где была выполнена часть представленной работы. В особенности я признателен профессору Yoop-No Kim, время проведенное в его лаборатории я всегда буду вспоминать с удовольствием.

Я безмерно благодарен всем моим родным и друзьям, без постоянной поддержки которых моя работа была бы невозможна.