

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ

Стручалин Г. И.

Пучки с плоским профилем

Учебное пособие

Москва — 2025

Содержание

1	Введение	3
2	Профиль пучка в декартовой системе координат	5
2.1	Постановка задачи	5
2.2	Решение	6
2.3	Асимптотика	8
2.4	Фурье образ	8
3	Профиль пучка в полярной системе координат	11
4	Нижняя граница потерь мощности	14
5	Заключение	18
6	Список использованных источников	19

1 Введение

Одним из методов повышения точности квантовых операций при ненулевой температуре движения атома в дипольной ловушке является использование лазерных пучков с плоским профилем интенсивности и фазы. Для краткости будем называть такой пучок плоским. Постоянная интенсивность и фаза пучка должны соблюдаться в области локализации атома в ловушке. Вне этой области распределение электромагнитного поля не так важно. Требуется лишь, чтобы оно довольно быстро убывало на периферии, не создавая перекрёстных помех на соседних атомах.

В эксперименте изначально имеется гауссов пучок, выходящий из одномодового волокна. В его волновой фронт можно вносить произвольную фазу $\varphi(x, y)$ с помощью *пространственного модулятора света* (SLM), где x, y — координаты в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. После фокусировки в области локализации атомов требуется получить плоский пучок. Таким образом, нужно найти фазовую голограмму, отображаемую на SLM, которая переводит гауссов пучок в плоский в дальней зоне дифракции. Отметим, что точного решения со 100% эффективностью (то есть без потерь мощности) задача не имеет, так как Фурье преобразование плоского пучка не совпадает по модулю с изначальным гауссовым пучком.

В литературе предлагаются разные методы решения. В работе [1] аналитически найден профиль асферической линзы $\varphi(x, y)$, которая без потерь переводит гауссов пучок в плоский по интенсивности:

$$\varphi(x, y) = c\varphi(x)\varphi(y), \quad \varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}x \operatorname{erf}(x) + \frac{1}{2} \exp(-x^2) - \frac{1}{2}, \quad (1)$$

где c — кривизна линзы, влияющая на поперечный размер плоского пучка, $\operatorname{erf}(x)$ — функция ошибок. К достоинствам метода относятся отсутствие потерь излучения, хорошая плоскостность интенсивности, вычислительная простота и лёгкая подстройка под размеры входного гауссова пучка и выходного плоского. Однако, существенным недостатком является неплоский профиль фазы. В первом приближении он имеет параболическую форму.

При выводе (1) авторы полагались на теорию дифракции Френеля. Вместе с тем, они отмечают, что рассмотрев задачу в пределе геометрической оптики и используя закон сохранения энергии, можно получить выражение, совпадающее с (1). Поэтому мы будем называть плоский пучок, получаемый с помощью (1), *геометрическим*.

Известны общие итерационные алгоритмы вычисления фазовых голограмм. Их можно разделить на семейство алгоритмов основанных на преобразовании Фурье [2] и оптимизационные методы [3]. Для работы этих алгоритмов необходимо задать начальное поле (в нашем случае это гауссов пучок) и желаемый профиль пучка в дальней зоне дифракции. Несомненное достоинство методов — большая гибкость, так как задаваемые поля могут быть произвольными, а также высокая теоретическая точность получаемых пучков. Недостатки заключаются в длительном времени вычислений и высокой чувствительности к экспериментальным погрешностям. Эффективность дифракции на рассчитанных голограммах может сильно изменяться в зависимости от задаваемых полей.

Очевидным вариантом плоского пучка будет $E(x, y) = E(x)E(y)$, где

$$E(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq W/2, \\ 0, & |x| > W/2, \end{cases} \quad (2)$$

W — ширина на полувысоте. Однако, такой выбор плох ввиду наличия резкой границы при $x = W/2$. Если использовать (2) в качестве желаемого поля в итерационных алгоритмах, то эффективность дифракции будет довольно низкой. Геометрический плоский пучок, формируемый линзой (1), также не имеет резкой границы. Такое поведение обусловлено фундаментальными законами дифракции. Получение скачкообразной границы требует бесконечно больших размеров оптических элементов и падающего гауссового пучка, что невозможно на практике. Поэтому встаёт задача поиска профиля плоского пучка со сглаженной границей, форма которой будет физически обоснована.

2 Профиль пучка в декартовой системе координат

2.1 Постановка задачи

В параксиальном приближении волнового уравнения можно разделить переменные по осям x и y , поэтому ограничимся рассмотрением полей вида $E(x, y) = E(x)E(y)$. Тем самым профиль пучка сводится к одномерной функции $E(x)$. Собственными решениями волнового уравнения в декартовых координатах являются моды Эрмита — Гаусса HG_n порядка n :

$$\text{HG}_n(x) = H_n(\sqrt{2}x) \exp(-x^2), \quad (3)$$

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n \exp(-x^2)}{dx^n}, \quad n \geq 0, \quad (4)$$

где $H_n(x)$ — полином Эрмита порядка n . Ширина моды w полагается равной единице. Для случая $w \neq 1$ следует во всех формулах провести замену $x \rightarrow x/w$. Также для простоты записи мы не нормируем моды на единицу; их норма равняется $\int_{-\infty}^{\infty} \text{HG}_n^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi/2}$.

Профиль плоского пучка $E(x)$ будем искать в виде суперпозиции низших мод Эрмита — Гаусса, чей порядок не превосходит N :

$$E(x) = \sum_{n=0}^N \tilde{c}_n \text{HG}_n(x), \quad (5)$$

где \tilde{c}_n — неизвестные вещественные коэффициенты. Требование плоскостности $E(x)$ учтём как обнуление K низших производных в точке $x = 0$:

$$\frac{d^k E(0)}{dx^k} = 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad (6)$$

$$E(0) = 1, \quad (7)$$

где последнее уравнение добавлено для выбора нормировки $E(x)$. Нетрудно видеть, что система (6)–(7) является линейной относительно \tilde{c}_n . Количество производных K следует взять максимальным при фиксированном N , лишь бы система имела решение.

В следующем разделе мы найдём решение системы (6)–(7) в явном виде для произвольного N и $K = N$, тем самым определив профиль плоского пучка $E(x)$.

2.2 Решение

Перепишем (5), явно выделив полиномиальную часть:

$$E(x) = \exp(-x^2) \sum_{n=0}^N \tilde{c}_n H_n(\sqrt{2}x). \quad (8)$$

Рассмотрим более подробно множество функций, имеющих форму (8), при произвольных коэффициентах \tilde{c}_n . По постановке задачи среди этого множества ищется решение системы (6)–(7). Очевидно, что суперпозиция полиномов Эрмита H_n есть некий полином порядка N . В обратную сторону: если задан произвольный полином порядка N , то его всегда можно разложить в виде суперпозиции H_n , так как H_n образуют полную ортогональную систему функций на всей числовой прямой. Поэтому вместо (8) решение можно искать среди эквивалентного множества функций:

$$E(x) = \exp(-x^2) \sum_{n=0}^N c_n x^n, \quad (9)$$

где c_n — новые коэффициенты, которые линейным образом выражаются через \tilde{c}_n . Заметим, что множитель $\sqrt{2}$ при x мы отнесли в c_n .

Естественно потребовать, чтобы профиль $E(x)$ был симметричным, то есть $E(x) = E(-x)$. Из чётности $E(x)$ сразу же следует, что $c_n = 0$ при нечётном n и $d^k E(0)/dx^k = 0$ при нечётном k . Поэтому в дальнейшем имеет смысл рассматривать только чётные N и K . Из (7) найдём, что $c_0 = 1$. Тогда, подставляя (9) в (6), получим:

$$\sum_{n=0}^{N/2} c_{2n} \left. \frac{d^{2k}(x^{2n} \exp(-x^2))}{dx^{2k}} \right|_{x=0} = 0, \quad k = 1, \dots, K/2. \quad (10)$$

При $n > k$, очевидно, производная в точке $x = 0$ равна нулю. При $n \leq k$ раскроем производную по правилу Лейбница:

$$\begin{aligned} \frac{d^{2k}(x^{2n} \exp(-x^2))}{dx^{2k}} &= \sum_{j=0}^{2k} \frac{(2k)!}{(2k-j)!j!} \frac{d^j x^{2n}}{dx^j} \frac{d^{2k-j} \exp(-x^2)}{dx^{2k-j}} = \\ &= \sum_{j=0}^{2k} \frac{(2k)!}{(2k-j)!j!} \frac{d^j x^{2n}}{dx^j} (-1)^{2k-j} \exp(-x^2) H_{2k-j}(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая, что $d^j(x^{2n})/dx^j|_{x=0} = (2n)!\delta_{2n}^j$ и $H_{2m}(0) = (-1)^m(2m)!/m!$, найдём:

$$\frac{d^{2k}(x^{2n} \exp(-x^2))}{dx^{2k}} \Big|_{x=0} = \begin{cases} (-1)^{k-n} \frac{(2k)!}{(k-n)!}, & n \leq k, k = 1, \dots, K/2, \\ 0, & n > k. \end{cases} \quad (12)$$

Из выражения (12) видно, что матрица системы уравнений (6)–(7) имеет треугольный вид. Следовательно, максимально возможное K , при котором система совместна, равно N : $K = N$. В итоге, (6)–(7) сводится к эквивалентной системе:

$$c_0 = 1, \quad (13)$$

$$\sum_{n=0}^k c_{2n} (-1)^{k-n} \frac{(2k)!}{(k-n)!} = 0, \quad k = 1, \dots, N/2. \quad (14)$$

Нетрудно заметить, что её решением будет $c_{2n} = 1/n!$, $c_{2n+1} = 0$. Действительно, достаточно рассмотреть следующее тождество, где использован бином Ньютона:

$$0 \equiv \frac{(2k)!}{k!} (1-1)^k = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} (-1)^{k-n} \frac{(2k)!}{(k-n)!}. \quad (15)$$

Подставляя найденное решение, искомый профиль плоского пучка (9) примет вид:

$$E(x) = \exp(-x^2) \sum_{n=0}^{N/2} \frac{x^{2n}}{n!}. \quad (16)$$

Его можно выразить в виде явной суммы по модам Эрмита — Гаусса (8), найдя коэффициенты \tilde{c}_n . Для этого выпишем разложение x^{2n} через $H_{2k}(\sqrt{2}x)$ [4, §18.18.20]:

$$x^{2n} = \frac{(2n)!}{2^{3n}} \sum_{j=0}^n \frac{H_{2n-2j}(\sqrt{2}x)}{j!(2n-2j)!}. \quad (17)$$

Подставив разложение в (16) и сгруппировав полиномы Эрмита H_{2k} одинакового порядка $2k := 2n - 2j$, после перестановки суммирования по индексам n и k , найдём:

$$E(x) = \exp(-x^2) \sum_{k=0}^{N/2} \left(\sum_{n=k}^{N/2} \frac{(2n)!}{2^{3n} n! (n-k)! (2k)!} \right) H_{2k}(\sqrt{2}x). \quad (18)$$

Выражение в скобках и равняется искомому коэффициенту \tilde{c}_{2k} .

Сумму (16) можно компактно переписать, воспользовавшись известным свойством нормированной неполной гамма функции $Q(a, z)$ [5, §6.5.13]:

$$E(x) = Q(N/2 + 1, x^2), \quad (19)$$

где:

$$Q(a, z) := \frac{\Gamma(a, z)}{\Gamma(a)}, \quad \Gamma(a) := \Gamma(a, 0), \quad \Gamma(a, z) := \int_z^\infty t^{a-1} e^{-t} dt, \quad (20)$$

$\Gamma(a, z)$ — неполная гамма функция.

Формально выражение (19) определено также для вещественных нецелых N . В этом случае формулу можно воспринимать как интерполяцию на произвольные N , что полезно при аналитическом исследовании.

2.3 Асимптотика

Формула (19) удобнее, чем (16), для анализа асимптотического поведения при $N \rightarrow \infty$. Используя теоремы 1.1 и 1.2 из работы [6] можно показать, что в нулевом приближении $E(x)$ сходится к дополнительной функции ошибок erfc :

$$E(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{2}|x| - \sqrt{N + 4/3}) + O(1/\sqrt{N}), \quad (21)$$

На практике аппроксимация хорошо работает уже при $N \gtrsim 10$. Так, для $N = 10$ погрешность не превосходит 0.014 при любом x .

Из асимптотики следует, что ширина плоского пучка на полувысоте составляет примерно $\sqrt{2N + 8/3}$, а размер переходной зоны, где интенсивность спадает от 1 до 0, стремится к постоянной¹.

2.4 Фурье образ

Для некоторых алгоритмов расчёта голограмм (как например в методе [7]) требуется подать на вход не сам желаемый профиль поля $E(x)$,

¹Однако, следует помнить, что она пропорциональна ширине мод Эрмита — Гаусса w , так как x измеряется в единицах w .

а его Фурье образ¹ $\mathcal{F}[E(x)](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \exp(ixt) dx$. Преобразование Фурье линейно, поэтому для вычисления $\mathcal{F}[E(x)]$ от (16) достаточно найти $\mathcal{F}[x^{2n}e^{-x^2}]$. Заметим, что для любой достаточно быстро убывающей функции $G(x)$ справедливо

$$\frac{d\mathcal{F}[G(x)]}{dx} = \mathcal{F}[ixG(x)] \Rightarrow \frac{d^{2n}\mathcal{F}[G(x)]}{dx^{2n}} = (-1)^n \mathcal{F}[x^{2n}G(x)]. \quad (22)$$

Положив $G(x) = \exp(-x^2)$ и учитывая $\mathcal{F}[\exp(-x^2)] = \exp(-x^2/4)/\sqrt{2}$, получим

$$\mathcal{F}[x^{2n} \exp(-x^2)] = \frac{(-1)^n d^{2n} \exp(-\frac{x^2}{4})}{\sqrt{2} dx^{2n}} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) H_{2n}\left(\frac{x}{2}\right). \quad (23)$$

Отсюда вытекает, что Фурье образ (16) равняется

$$\mathcal{F}[E(x)] = \frac{S_{N/2}}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right), \quad S_{N/2} = \sum_{n=0}^{N/2} \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!} H_{2n}\left(\frac{x}{2}\right). \quad (24)$$

Сумму $S_{N/2}$ можно дальше упростить, воспользовавшись известными рекуррентными соотношениями для полиномов Эрмита [5, §22.7.13]. С их помощью выразим $H_{2n}(x/2)$:

$$xH_{2n}(x/2) = 4nH_{2n-1}(x/2) + H_{2n+1}(x/2). \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24), имеем:

$$xS_{N/2} = \sum_{n=1}^{N/2} \frac{(-1)^n 4n H_{2n-1}(x/2)}{2^{2n}n!} + \sum_{n=0}^{N/2} \frac{(-1)^n H_{2n+1}(x/2)}{2^{2n}n!}. \quad (26)$$

Выполним замену $m = n - 1$ в первой сумме, тогда:

$$xS_{N/2} = - \sum_{m=0}^{N/2-1} \frac{(-1)^m H_{2m+1}(x/2)}{2^{2m}m!} + \sum_{n=0}^{N/2} \frac{(-1)^n H_{2n+1}(x/2)}{2^{2n}n!}. \quad (27)$$

В полученном выражении суммы почти полностью сокращают друг друга, и остаётся только последний член второй суммы. В итоге (24) принимает вид:

$$\mathcal{F}[E(x)] = \frac{(-1)^{N/2}}{2^N(N/2)!\sqrt{2}} \frac{H_{N+1}(x/2)}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right). \quad (28)$$

¹В дальнейшем мы не будем явно выписывать аргумент Фурье образа, предполагая, что он обозначен той же буквой x вместо t .

Отметим, что формально при $x = 0$ имеется устранимая особая точка, поэтому значение надо понимать в смысле предела $x \rightarrow 0$. Дробь $H_{N+1}(x/2)/x$ в сущности является полиномом порядка N . Если воспользоваться связью полиномов Эрмита нечётного порядка H_{N+1} с присоединёнными полиномами Лагерра $L_{N/2}^{(1/2)}$ [5, §22.5.41], то выражение можно переписать, сократив деление на x :

$$\mathcal{F}[E(x)] = \frac{1}{\sqrt{2}} L_{N/2}^{(1/2)} \left(\frac{x^2}{4} \right) \exp \left(-\frac{x^2}{4} \right). \quad (29)$$

На практике удобнее нормировка $\mathcal{F}[E(x)](0) = 1$. В этой нормировке:

$$\mathcal{F}[E(x)] = \frac{(-1)^{N/2} (N/2)! H_{N+1}(x/2)}{(N+1)! x} \exp \left(-\frac{x^2}{4} \right). \quad (30)$$

Для исследования асимптотического поведения (30) при $N \rightarrow \infty$ выразим нечётный полином Эрмита $H_{N+1}(x/2)$ через вырожденную гипергеометрическую функцию Куммера $M(a, b, z)$ [5, §22.5.57]:

$$\mathcal{F}[E(x)] = M \left(-\frac{N}{2}, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{4} \right) \exp \left(-\frac{x^2}{4} \right) = M \left(\frac{N+3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{x^2}{4} \right), \quad (31)$$

где в последнем равенстве применены так называемые преобразования Куммера [5, §13.1.27]. Воспользовавшись асимптотическим разложением функции Куммера при больших N [5, §13.5.14], найдём:

$$\mathcal{F}[E(x)] = \text{sinc} \left(x \sqrt{\frac{N}{2} + \frac{3}{4}} \right) \exp \left(-\frac{x^2}{8} \right) \left(1 + O(1/\sqrt{N}) \right). \quad (32)$$

Отметим, что с точностью до членов порядка $O(1/\sqrt{N})$ асимптотику (32) можно вычислить непосредственно, если взять преобразование Фурье от (21) и принять во внимание соотношение:

$$\mathcal{F} \left[\exp \left(-\frac{x^2}{a^2} \right) \text{sinc}(bx) \right] \propto \text{erfc} \left(\frac{a(x-b)}{2} \right) - \text{erfc} \left(\frac{a(x+b)}{2} \right). \quad (33)$$

Наконец заметим, что используя связь неполной гамма функции $\Gamma(a, z)$ с вырожденной гипергеометрической функцией Уиттекера $U(a, b, z)$ [4, §8.5.3] и интеграл [4, §13.10.12], можно показать, что преобразование Фурье от функции (19) действительно приводит к результату (31) при любом N , не обязательно целом.

3 Профиль пучка в полярной системе координат

Выше был рассмотрен профиль плоского пучка, состоящего из низших мод Эрмита — Гаусса, и поэтому имеющий форму сглаженного прямоугольника. Для некоторых применений может понадобится радиально симметричный плоский пучок. Для нахождения его профиля удобно перейти в полярную систему координат. В полярной системе координат (r, φ) собственными модами волнового уравнения в параксиальном приближении будут моды Лагерра — Гаусса $\text{LG}_n^{(l)}$ с радиальным индексом $n \geq 0$ и азимутальным $l \in \mathbb{Z}$:

$$\text{LG}_n^{(l)}(r, \varphi) = r^{|l|} \exp(-r^2) L_n^{(|l|)}(2r^2) \exp(-il\varphi), \quad (34)$$

$$L_n^{(\alpha)}(r) = \frac{r^{-\alpha} \exp(r)}{n!} \frac{d^n \exp(-r) r^{n+\alpha}}{dr^n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (35)$$

где $L_n^{(\alpha)}(r)$ — присоединённые многочлены Лагерра. Нам интересен радиально симметричный случай, поэтому далее положим $l = 0$ и введём обозначения $\text{LG}_n^{(0)}(r, \varphi) = \text{LG}_n(r)$, $L_n^{(0)} = L_n$.

По аналогии с разделом 2, будем искать профиль плоского пучка $E(r)$ в виде суперпозиции низших мод Лагерра — Гаусса LG_n и наложим требование равенства нулю низших производных по r в точке $r = 0$ (см. выражения (5)–(7)). Так как многочлены Лагерра L_n являются системой многочленов с возрастающей на единицу степенью n , то можно перейти от суммы многочленов Лагерра с неизвестными коэффициентами к эквивалентному множеству полиномов, подобно тому, как сделано при переходе от (8) к (9). Искомый вид профиля $E(r)$ будет совпадать с (9) с точностью до переобозначения переменной x на r . Система уравнений на обнуление производных также не изменится, поэтому сразу находим её решение (см. (16) и (19)):

$$E(r) = \exp(-r^2) \sum_{n=0}^{N/2} \frac{r^{2n}}{n!} = Q(N/2 + 1, r^2). \quad (36)$$

Аналогично (18) найдём разложение $E(r)$ по модам Лагерра — Гаусса в явном виде. Выразим r^{2n} по системе полиномов Лагерра $L_n(x)$ [4, §18.18.19]:

$$r^{2n} = \frac{(n!)^2}{2^n} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!(n-j)!} L_j(2r^2). \quad (37)$$

Тогда

$$E(r) = \exp(-r^2) \sum_{k=0}^{N/2} \left(\sum_{n=k}^{N/2} \frac{(-1)^k n!}{2^n k! (n-k)!} \right) L_k(2r^2). \quad (38)$$

Двумерное преобразование Фурье \mathcal{F} для радиально симметричных функций сводится к преобразованию Ханкеля нулевого порядка \mathcal{H} :

$$\mathcal{H}[E(r)](k) = \int_0^\infty E(r) J_0(kr) r dr, \quad (39)$$

где J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Действительно:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[E(r)](k_x, k_y) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} E(\sqrt{x^2 + y^2}) \exp(ixk_x + iyk_y) dx dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr r E(r) \int_0^{2\pi} \exp(ikr \cos \varphi) d\varphi = \int_0^\infty E(r) J_0(kr) r dr, \end{aligned} \quad (40)$$

где в последнем равенстве использовано известное интегральное представление функции Бесселя [5, §9.1.18] и введено обозначение $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.

Для вычисления преобразование Ханкеля от (36) представим $Q(N/2 + 1, r^2)$ через функцию Уиттекера U [4, §8.5.3]:

$$Q(N/2 + 1, r^2) = \frac{\exp(-r^2)}{\Gamma(N/2 + 1)} U \left(-\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}, r^2 \right). \quad (41)$$

Подставим это выражение в преобразование Ханкеля (39), сделав замену переменной $r^2 = t$:

$$\mathcal{H}[E(r)](k) = \frac{1}{2\Gamma(N/2 + 1)} \int_0^\infty e^{-t} U \left(-\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}, t \right) J_0(k\sqrt{t}) dt. \quad (42)$$

Далее воспользуемся табличным интегралом [4, §13.10.16], содержащим функцию Бесселя:

$$\mathcal{H}[E(r)](k) = \frac{\Gamma(N/2 + 2) \exp(-k^2/4)}{2\Gamma(N/2 + 1)} M \left(-\frac{N}{2}, 2, \frac{k^2}{4} \right). \quad (43)$$

Наконец, используя преобразование Куммера [4, §13.2.39] и переобозначая k на r , придём к выражению:

$$\mathcal{H}[E(r)] = \frac{N+2}{4} M \left(\frac{N+4}{2}, 2, -\frac{r^2}{4} \right). \quad (44)$$

Для чётных N выражение упрощается [4, §13.6.19]:

$$\mathcal{H}[E(r)] = \frac{1}{2} L_{N/2}^{(1)} \left(\frac{r^2}{4} \right) \exp \left(-\frac{r^2}{4} \right). \quad (45)$$

В нормировке $\mathcal{H}[E(r)](0) = 1$ полученные выражения нужно домножить на $4/(N + 2)$.

4 Нижняя граница потерь мощности

В настоящем разделе мы построим нижнюю границу на потери мощности, которые возникают, если начальный световой пучок попытаться преобразовать в произвольный желаемый посредством фазовой модуляции.

Введём стандартное скалярное произведение $\langle f, g \rangle$, $f, g \in L^2$ и порождённую им норму $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$ на пространстве L^2 интегрируемых с квадратом функций:

$$\langle f(x), g(x) \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x) dx. \quad (46)$$

Физический смысл квадрата нормы $\|f(x)\|^2$ — полная мощность пучка с профилем $f(x)$.

Как и ранее предполагаем, что изначальная заданная волна с комплексной амплитудой $G(x)$ (обычно это гауссов пучок) падает на пространственный модулятор света, который вносит фазу $\varphi(x)$ в её волновой фронт. После преобразования Фурье \mathcal{F} , осуществляемого линзой, в фокальной плоскости мы стремимся получить желаемый профиль $E(x)$, варьируя $\varphi(x)$. Так как, вообще говоря, $G(x)$ и $E(x)$ никак не связаны, то при таком преобразовании возникнут потери или искажения:

$$\mathcal{F}[G(x) \exp(i\varphi(x))] = \eta E(x) + B(x), \quad (47)$$

где функция $B(x)$ описывает отклонения получаемого пучка от желаемого, а множитель η учитывает, что допустимы потери мощности (и общий фазовый сдвиг) при сохранении формы $E(x)$. Обычно стремятся, чтобы в области интереса $x \in [x_1, x_2]$, где профиль $E(x)$ существенно отличен от нуля, функция $B(x)$ наоборот была пренебрежимо малой: $|\eta E(x)| \gg |B(x)| \approx 0$ при $x \in [x_1, x_2]$. Величину $|\eta|$ стараются максимизировать, чтобы уменьшить потери. Паразитное излучение $B(x)$ за пределами области интереса $x \notin [x_1, x_2]$ можно убрать, например, диафрагмами, тем самым оставив только полезный сигнал $\eta E(x)$.

Из (47) ясно, что мощность потерь составляет $\|B(x)\|^2$. Найдя минимум $\min_{\varphi(x), \eta} \|B(x)\|^2$ по всевозможным фазовым голограммам $\varphi(x)$ и параметру η , мы получим нижнюю границу на потери. Для простоты вычисления мини-

му́ма мы не будем налагать дополнительных требований на $B(x)$ в области интереса. Учёт этих требований может только увеличить значение минимума, так как множество допустимых $\varphi(x)$ сужается.

Возьмём обратное преобразование Фурье \mathcal{F}^{-1} от (47) и учтём, что по теореме Парсеваля преобразование Фурье сохраняет норму, то есть $\|B(x)\|^2 = \|\mathcal{F}^{-1}[B(x)]\|^2$:

$$\|B(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |G(x) \exp(i\varphi(x)) - \eta \mathcal{F}^{-1}[E(x)]|^2 dx. \quad (48)$$

Минимум подынтегрального выражения, а вместе с тем и самого интеграла, достигается, когда аргументы двух членов в разности совпадают, откуда

$$\varphi(x) = \arg(\eta \mathcal{F}^{-1}[E(x)]) - \arg(G(x)). \quad (49)$$

Подставляя это решение в (48) найдём:

$$\min_{\varphi(x)} \|B(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (|G(x)| - |\eta| \cdot |\mathcal{F}^{-1}[E(x)]|)^2 dx. \quad (50)$$

Выражение (50) квадратично зависит от параметра $|\eta|$:

$$\min_{\varphi(x)} \|B(x)\|^2 = \|G(x)\|^2 - 2|\eta| \langle |G(x)|, |\mathcal{F}^{-1}[E(x)]| \rangle + |\eta|^2 \|\mathcal{F}^{-1}[E(x)]\|^2. \quad (51)$$

Минимизируя по $|\eta|$ окончательно получим, что минимальная потеря мощности $\|B(x)\|^2$ относительно изначальной $\|G(x)\|^2$ составляет:

$$\min_{\varphi(x), \eta} \frac{\|B(x)\|^2}{\|G(x)\|^2} = 1 - \frac{\langle |G(x)|, |\mathcal{F}^{-1}[E(x)]| \rangle^2}{\|G(x)\|^2 \cdot \|\mathcal{F}^{-1}[E(x)]\|^2}. \quad (52)$$

Для плоского пучка вида (19) интегралы в (52) не берутся аналитически, поэтому рассчитаем минимум потерь численно. На рисунках 1 и 2 приведены получившиеся результаты.

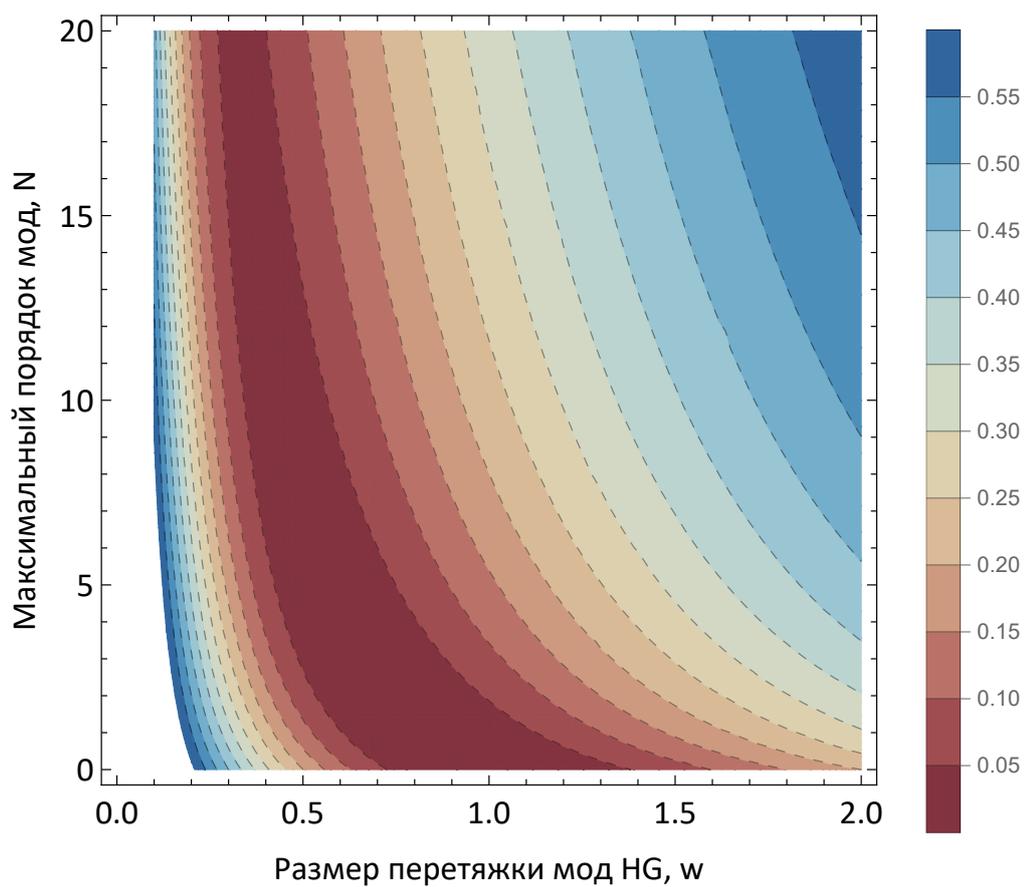


Рисунок 1 — Нижняя граница потерь мощности для плоского пучка в зависимости от ширины перетяжки моды HG_0 , w , и максимального порядка мод N .

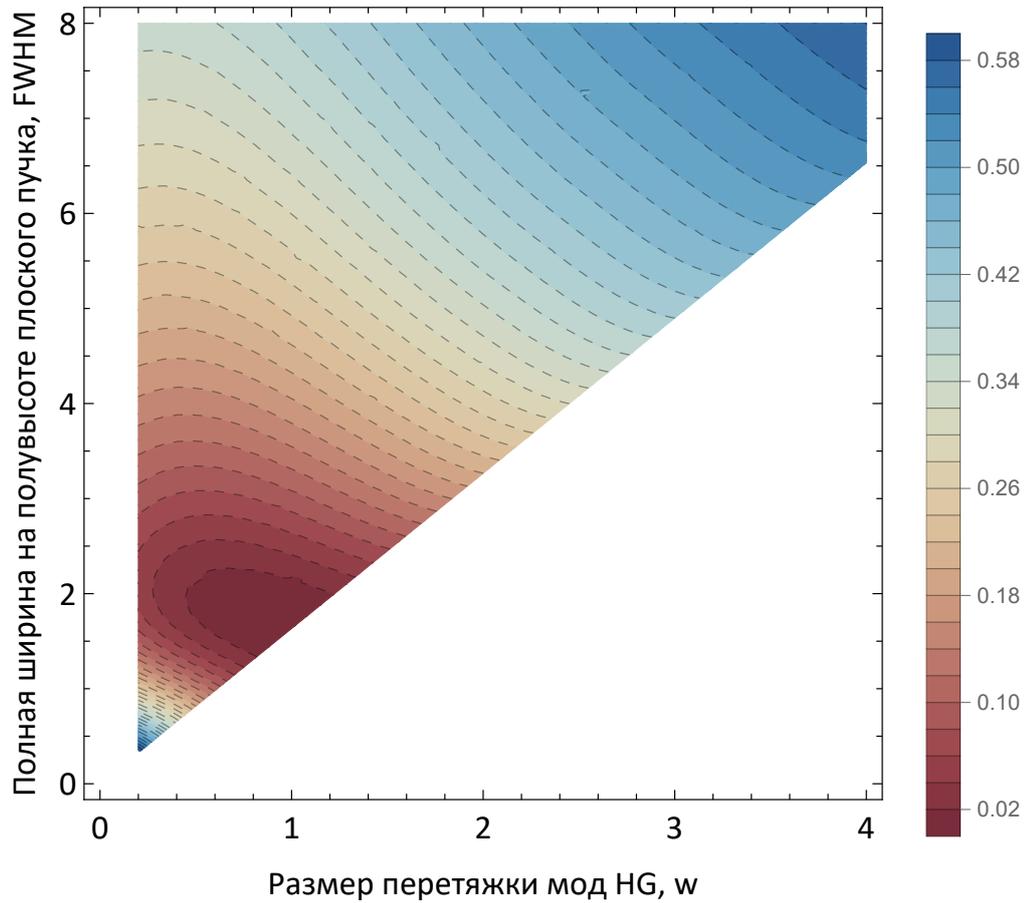


Рисунок 2 — Нижняя граница потерь мощности для плоского пучка в зависимости от ширины перетяжки моды HG_0 , w , и полной ширины на полувысоте. На линии $w = 0$ форма пучка становится прямоугольной. Нижней диагонали соответствует $N = 0$ и пучок имеет гауссову форму.

5 Заключение

Найдена форма плоского пучка $E(x)$, содержащего только низшие моды Эрмита — Гаусса с порядком от 0 до N (см. выражения (16) или (19)). Рассчитано его преобразование Фурье $\mathcal{F}[E(x)]$ (30) или в виде (31). Также получена асимптотика $E(x)$ (21) и $\mathcal{F}[E(x)]$ (32) при $N \rightarrow \infty$.

Найдена нижняя граница (52) потерь мощности при преобразовании падающего пучка $G(x)$ в заданный $E(x)$ с помощью фазового модулятора.

6 СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Romero, L. A.* Lossless laser beam shaping / L. A. Romero, F. M. Dickey // *J. Opt. Soc. Am. A.* — 1996. — Apr. — Vol. 13, no. 4. — Pp. 751–760. <https://opg.optica.org/josaa/abstract.cfm?URI=josaa-13-4-751>.
2. *Wu, L.* Simultaneous shaping of amplitude and phase of light in the entire output plane with a phase-only hologram / L. Wu, S. Cheng, S. Tao // *Sci. Rep.* — 2015. — Sep. — Vol. 5, no. 15426. — Pp. 1–10.
3. High-fidelity phase and amplitude control of phase-only computer generated holograms using conjugate gradient minimisation / D. Bowman, T. L. Harte, V. Chardonnet et al. // *Opt. Express.* — 2017. — May. — Vol. 25, no. 10. — Pp. 11692–11700. <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-25-10-11692>.
4. NIST Digital Library of Mathematical Functions. <https://dlmf.nist.gov/>.
5. *Абрамович, М.* Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган; edited by Т. И. Кузнецова, Е. Ю. Ходан.
6. *Nemes, Gergő.* Asymptotic expansions for the incomplete gamma function in the transition regions / Gergő Nemes, Adri B. Olde Daalhuis // *Math. Comp.* — 2019. — Vol. 88. — Pp. 1805–1827.
7. Exact solution to simultaneous intensity and phase encryption with a single phase-only hologram / Eliot Bolduc, Nicolas Bent, Enrico Santamato et al. // *Opt. Lett.* — 2013. — Sep. — Vol. 38, no. 18. — Pp. 3546–3549. <https://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-38-18-3546>.